Einführung in die Physik I (für Nicht-PhysikerInnen)
Präsenzübungen Woche 15

28 Januar - 01 Februar 2019

1. Wenn der Einfallswinkel klein genug ist, dann kann das Snellius'sche Brechungsgesetz vereinfacht werden, indem man die Näherung für kleine Winkel ansetzt: $\sin\theta \approx \theta$. Nehmen Sie an, Sie wollen einen Brechungswinkel berechnen. Wie groß darf der Einfallswinkel sein, wenn der auf diese Näherung zurückführende Fehler – verglichen mit der Anwendung der exakten Formel – höchstens 1% ausmachen soll?

Lösung: Der Fehler $\Delta\theta$ wird berechnet mit $\Delta\theta = \theta - \sin\theta$ und soll gegenüber der genauen Lösung ($\sin\theta$) nur maximal 0,01 mal so groß sein. Deshalb suchen wir den Wert von θ für den gilt:

$$\frac{\theta - \sin\theta}{\sin\theta} = 0,01.$$

Hieraus folgt:

$$\theta - 1,01\sin\theta = 0.$$

Um dies zu lösen, gibt es mehrere Möglichkeiten. So können wir zum Beispiel die Taylorreihe der Funktion $\sin\theta$ benutzen: $\sin\theta = \theta - \theta^3/6 + \theta^5/120 - (...)$. Man kann das Problem auch numerisch lösen mit einem leistungsfähigen Taschenrechner, oder einfach Werte für θ (in Radianten!) einsetzen bis wir die ungefähre Lösung bekommen. Mit der Taylorreihe erhalten wir:

$$-0,01\theta + 1,01\theta^3/6 = 0,$$

was also als Auskunft $\theta = 0,24\,\mathrm{rad}$ gibt. (Der vernachlässigte Term $\theta^5/120$ entspricht also $7,2 \cdot 10^{-6}$ rad und ist also völlig vernachlässigbar.)

Setzen wir zur Prüfung diesen Wert in die Anfangsgleichung ein, finden wir:

$$\frac{0,24 - \sin(0,24)}{\sin(0,24)} = \frac{0,24 - 0,237703}{0,237703} = 0,00966$$

was also tatsächlich ziemlich genau 1% ist.

Bemerke, dass die Anfangsgleichung auch umgekehrt berechnet werden könnte:

$$\frac{\sin\theta - \theta}{\sin\theta} = 0,01.$$

Für die Lösung macht dies keinen wesentlich Unterschied, es sollte dann aber im Zähler der Betrag $|\sin\theta - \theta|$ genutzt worden, damit die Lösung reel ist.

2. Die Decke eines Saals ist mit schalldämmenden Platten versehen, in denen sich kleine Löcher befinden. Deren Abstand beträgt 6,2 mm.

   (a) Aus welcher Entfernung kann man bei einer Lichtwellenlänge von 500 nm die Löcher gerade noch einzeln erkennen? Setzen Sie den Pupillendurchmesser zu 5,0 mm an. (Wir nehmen 100% Sehschärfe an.)

   Lösung: Für einen Abstand l des Auges zur Decke und einen Abstand Δx zwischen den Löchern gibt es also einen Winkel $\alpha \approx {}^{\Delta x}/_{l}$ zwischen den Lichtstrahlen, die von zwei benachbarten Löchern ins Auge fallen. Das Rayleigh'sche Kriterium der Auflösung besagt, dass kreisförmige Öffnungen mit Durchmesser D bei einer Wellenlänge λ eine Winkelauflösung $\alpha_\mathrm{k} = 1,22\lambda/D$ haben. Setzen wir die beiden Ausdrücke gleich, bekommen wir:

$$\frac{\Delta x}{l} = 1,22\frac{\lambda}{D},$$

oder:

$$l = \frac{\Delta x D}{1,22\lambda} = \frac{6,2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \cdot 5,0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{1,22 \cdot 5,00 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}} = 51\,\mathrm{m}.$$

(b) Kann man die Löcher bei rotem oder bei violettem Licht aus größerer Entfernung einzeln erkennen? (Merke, dass rotes Licht eine größere Wellenlänge hat als violettes Licht.)

Lösung: Weil die mögliche Auflösung umgekehrt proportional zu λ ist, sind die Löcher bei kleineren Wellenlängen aus größerer Entfernung zu erkennen. Bei violettem Licht können sie also aus grösserem Abstand erkannt werden als bei rotem Licht.