Einführung in die Physik I (für Nicht-PhysikerInnen)
Hausaufgaben Woche 10

10 - 14 Dezember 2018

1. Welche Wärmemenge braucht man, um 500 g Eis der Temperatur $-10,1\,^\circ$C bei 1,0 bar in Wasserdampf zu überführen? (Tipp: vier "Teilmengen" sollten berücksichtigt werden: die Erwärmung des Eises, das Schmelzen des Eises, die Erwärmung des Wassers und die Verdampfung des Wassers.)

   Für die Wärmekapazitäten kann angenommen werden: $c_{\mathrm{Eis}} = 2,05\,\mathrm{kJ/(kg \cdot K)}$ und $c_{\mathrm{H_2O}} = 4,18\,\mathrm{kJ/(kg \cdot K)}$. Die Schmelz- und Verdampfungswärmen sind $\lambda_{\mathrm{S}} = 333,5\,\mathrm{kJ/kg}$ und $\lambda_{\mathrm{D}} = 2257\,\mathrm{kJ/kg}$.

Lösung: Für die Erwärmung des Eises berechnen wir (weil ΔT in K und C gleich ist):

$$\begin{aligned} Q_1 &= m_{\mathrm{Eis}}\, c_{\mathrm{Eis}}\, \Delta T \\ &= 0,500\,\mathrm{kg} \cdot 2,05\,\mathrm{kJ/(kg \cdot K)} \cdot 10,1\,^\circ\mathrm{K} \\ &= 10352,5\,\mathrm{J} \\ &= 10,4\,\mathrm{kJ} \end{aligned}$$

Für das Schmelzen gilt:

$$\begin{aligned} Q_2 &= m_{\mathrm{Eis}}\, \lambda_{\mathrm{S}} \\ &= 0,500\,\mathrm{kg} \cdot 333,5\,\mathrm{kJ/kg} \\ &= 167\,\mathrm{kJ} \end{aligned}$$

Als Nächstes berechnen wir die Wärmemenge für die Aufheizung des Wassers:

$$\begin{aligned} Q_3 &= m_{\mathrm{H_2O}}\, c_{\mathrm{H_2O}}\, \Delta T \\ &= 0,500\,\mathrm{kg} \cdot 4,18\,\mathrm{kJ/(kg \cdot K)} \cdot 100\,^\circ\mathrm{K} \\ &= 209\,\mathrm{kJ} \end{aligned}$$

Zuletzt berechnen wir die Wärmemenge für die Verdampfung des Wassers:

$$\begin{aligned} Q_4 &= m_{\mathrm{H_2O}}\, \lambda_{\mathrm{D}} \\ &= 0,500\,\mathrm{kg} 2257\,\mathrm{kJ/kg} \\ &= 113 \cdot 10\,\mathrm{kJ}. \end{aligned}$$

Insgesamt brauchen wir also $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 1,52\,\mathrm{MJ}$ an Wärme. Beachte, dass fast 75% der Wärme für die Verdampfung benötigt werden, und dass die Aufheizung und das Schmelzen zusammen nur einem Viertel der Wärme entsprechen.

2. Eine Punktladung von $-2,5\,\mu$C befindet sich im Koordinatenursprung, eine zweite Ladung von $+6,1\,\mu$C bei $x = 3,0\,\mathrm{m}$, $y = 4,0\,\mathrm{m}$. Bestimme die Position des Orts, an dem sich ein Elektron im Gleichgewicht befinden würde. (Hinweis: der gesuchte Ort sollte auf derselben Linie liegen wie die zwei Ladungen, weil sonst die Kräfte der zwei Ladungen einander nicht aufheben können. Die einzige Unbekannte ist deshalb der Abstand zu den zwei Quellen; dieser kann mit dem Coulombschen Gesetz berechnet werden.)

Lösung: Die abstoßende Kraft der ersten Punktladung ist:

$$F_{\mathrm{ab}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_1^2},$$

und die anziehende Kraft der zweiten Ladung ist:

$$F_{\mathrm{an}} = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_2^2},$$

wobei q_1 die Ladung des Elektrons ist, $q_2 = -2,5\,\mu\mathrm{C}$, $q_3 = 6,1\,\mu\mathrm{C}$, r_1 der Abstand zum Koordinatenursprung und r_2 der Abstand zur zweiten Ladung. Nun sollen die Kräfte sich aufheben, d.h. $F_{\mathrm{ab}} + F_{\mathrm{an}} = 0$, bzw.:

$$\frac{q_1 q_2}{r_1^2} = -\frac{q_1 q_3}{r_2^2}.$$

Außerdem wissen wir, dass der Gleichgewichtspunkt und die zwei Ladungen auf einer Geraden liegen und dass der Abstand zwischen den zwei Ladungen $D = \sqrt{3,0^2 + 4,0^2} = 5,0\,\mathrm{m}$ ist. Es gilt also $|r_1 - r_2| = D$. Weil die zweite Ladung größer ist, sollte der Gleichgewichtsabstand weiter von dieser entfernt sein als von der ersten, bzw: $r_2 > r_1$ und deshalb: $r_2 - r_1 = D$ oder $r_2 = D + r_1$. Hiermit können wir die Gleichung lösen:

$$\begin{aligned} q_2 r_2^2 &= -q_3 r_1^2 \\ q_2 (r_1 + D)^2 &= -q_3 r_1^2 \end{aligned}$$

Multiplizieren wir jetzt die Gleichung mit -1 und ziehen die Wurzel, bekommen wir:

$$\sqrt{-q_2}\,(r_1 + D) = \sqrt{q_3}\, r_1.$$

Für r_1 können wir also wie folgt lösen:

$$r_1 = -\frac{\sqrt{-q_2} D}{\sqrt{-q_2} - \sqrt{q_3}} = -\frac{\sqrt{2,5\,\mu\mathrm{C}} 5\,\mathrm{m}}{\sqrt{2,5\,\mu\mathrm{C}} - \sqrt{6,1\,\mu\mathrm{C}}} = 8,9\,\mathrm{m}.$$

Der Gleichgewichtsort liegt also $8,9\,\mathrm{m}$ vom Koordinatenursprung entfernt, auf der Linie, die durch die zwei Punktladungen verläuft. Er liegt im dritten Quadranten des Koordinatensystems, also $x\,,\,y < 0$, da das Elektron sonst zur positiven Ladung beschleunigt würde.

Die x- und y-Koordinaten waren nicht gefragt, können aber auch einfach berechnet werden. Dafür muss zuerst die Gerade der Punktladungen berechnet werden, diese erfüllt die Gleichung $y = 4/3x$. Entlang dieser Linie suchen wir also den Punkt, für den die x- und y-Werte negativ sind und für den $\sqrt{x^2 + y^2} = 8,9\,\mathrm{m}$. Dieser Punkt ist $(x, y) = (-5,3\,\mathrm{m}, -7,1\,\mathrm{m})$.