Einführung in die Physik I (für Nicht-PhysikerInnen)
Präsenzübungen Woche 7

19 - 23 November 2018

1. Wir haben gesehen, dass Rollreibungskräfte nur als Folge von Verformungen aufgetreten. Um dies zu überprüfen, betrachte eine vollständige starre Kugel, die, ohne zu gleiten, auf einer vollständig starren, horizontalen Oberfläche rollt. Zeige, dass die Reibungskraft auf die Kugel null sein muss.

Lösung: Betrachten wir das Gleichgewicht im Massenmittelpunkt. In horizontaler Richtung gibt es nur die hypothetische Reibungskraft, die den Massenmittelpunkt mit F_R/m in die hintere Richtung beschleunigt, wobei m die Masse der Kugel ist. Daraus resultieren ein Drehmoment $F_\mathrm{R}r$ und eine Winkelbeschleunigung $\alpha = M/I = F_\mathrm{R}r/I$ mit I dem Trägheitsmoment der Kugel. Es erfolgt also eine Drehbewegung um den Kontaktpunkt und deshalb erfährt der Massenmittelpunkt eine Beschleunigung in die vordere Richtung, mit einem Betrag von: $a = r\alpha = F_\mathrm{R}r^2/I$. Die Gesamtbeschleunigung des Massenschwerpunktes a_S ist also:

$$a_\mathrm{S} = F_\mathrm{R}\frac{mr^2 - I}{Im}.$$

Mit einer solchen Beschleunigung ist die Rollbedingung $a_\mathrm{S} = r_\mathrm{S}\alpha$ nicht mehr erfüllt und die Kugel würde anfangen zu gleiten, was der Aufgabenstellung widerspricht. In realistischeren Fällen, bei denen es zu Verformungen kommt und daher auch Reibungskräfte vorliegen, muss eine zusätzliche Kraft auf die Kugel ausgeübt werden, um die Rollbedingung geltend zu machen.

2. Das Trägheitsmoment eines Objekts ist definiert als $I = \int r^2 \mathrm{d}m$. Falls sich ein Objekt um eine Achse dreht, die nicht durch den Massenmittelpunkt geht, aber einen Abstand d davon entfernt ist, kann man das Trägheitsmoment um diese Achse einfach mit dem *Steiner'scher Satz* berechnen: $I = I_\mathrm{S} + md^2$. Beweise diesen Satz.

Lösung: Es gibt mehrere Möglichkeiten, dies zu beweisen. Eine Möglichkeit besteht darin, die kinetische Energie des Objekts umzuformen. Diese ist gleich:

$$E_\mathrm{kin} = \frac{1}{2}I\omega^2,$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit ist. Mit Bezug zum Massenschwerpunkt kann dies aber auch geschrieben werden als:

$$E_\mathrm{kin} = \frac{1}{2}I_\mathrm{S}\omega^2 + \frac{1}{2}mv_\mathrm{S}^2,$$

weil die Drehung im Massenschwerpunkt eine lineare Geschwindigkeit $v_\mathrm{S} = d\omega$ zur Folge hat.

Durch Gleichsetzen bekommen wir:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I_\mathrm{S}\omega^2 + \frac{1}{2}md^2\omega^2.$$

Hieraus leiten wir ab, dass:

$$I = I_\mathrm{S} + md^2,$$

was gefragt war.

Eine andere Lösung erhält man durch Berechnung des Trägheitsmoments. Hierzu definieren wir den *festen* Vektor $\vec{d}$ der vom Massenmittelpunkt zur Drehachse zeigt; und der *variable* Vektor $\vec{r}$, der von jedem Punkt des Objektes zum Massenschwerpunkt zeigt.

Für das Trägheitsmoment mit Bezug zur Drehachse erhalten wir dann:

$$I = \int \left(\vec{r} + \vec{d}\right)^2 \mathrm{d}m.$$

Hierbei ist $\left(\vec{r} + \vec{d}\right)^2$ eigentlich nur das Quadrat des Abstands zwischen der Drehachse und einem willkürlichen Punkt des Objekts. Berechnen wir dieses für zwei Dimensionen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\left(\vec{r} + \vec{d}\right)^2 &= (r_\mathrm{x} + d_\mathrm{x})^2 + (r_\mathrm{y} + d_\mathrm{y})^2 \\
&= r_\mathrm{x}^2 + d_\mathrm{x}^2 + 2r_\mathrm{x}d_\mathrm{x} + r_\mathrm{y}^2 + d_\mathrm{y}^2 + 2r_\mathrm{y}d_\mathrm{y} \\
&= \left(r_\mathrm{x}^2 + r_\mathrm{y}^2\right) + \left(d_\mathrm{x}^2 + d_\mathrm{y}^2\right) + 2\left(d_\mathrm{x}r_\mathrm{x} + d_\mathrm{y}r_\mathrm{y}\right) \\
&= r^2 + d^2 + 2\left(d_\mathrm{x}r_\mathrm{x} + d_\mathrm{y}r_\mathrm{y}\right)
\end{aligned}$$

Setzen wir dieses jetzt in die Gleichung für I ein, bekommen wir:

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m + \int d^2 \mathrm{d}m + 2\int r_\mathrm{x}d_\mathrm{x}\mathrm{d}m + 2\int r_\mathrm{y}d_\mathrm{y}\mathrm{d}m.$$

Der erste Term ist definitionsgemäß I_S. Für die übrige Termen bemerken wir, dass d und somit d_x und d_y konstant sind. Der zweite Term wird also $d^2 \int \mathrm{d}m = d^2 m$ sein:

$$I = I_\mathrm{S} + d^2 m + 2d_\mathrm{x}\int r_\mathrm{x}\mathrm{d}m + 2d_\mathrm{y}\int r_\mathrm{y}\mathrm{d}m.$$

Jetzt erinnern wir uns an die Definition des Massenschwerpunkts: $\int r \mathrm{d}m = 0$. Dies muss in alle Richtungen gelten, d.h.: $\int r_\mathrm{x}\mathrm{d}m = 0$ und $\int r_\mathrm{y}\mathrm{d}m = 0$. Die obere Gleichung vereinfacht sich also, weil die zwei letzte Terme gleich null sind:

$$I = I_\mathrm{S} + d^2 m,$$

was gefragt war.