Einführung in die Physik I (für Nicht-PhysikerInnen)
Hausaufgaben Woche 5

05 - 09 November 2018

1. Ein Keil der Masse m_2 ruht auf einer Waagschale (siehe Abbildung 1). Ein kleiner Klotz der Masse m_1 rutscht reibungsfrei die geneigte Seite des Keils herunter. Was zeigt die Waage an, während der Klotz herunterrutscht? Der Keil soll nicht auf der Waagschale gleiten.

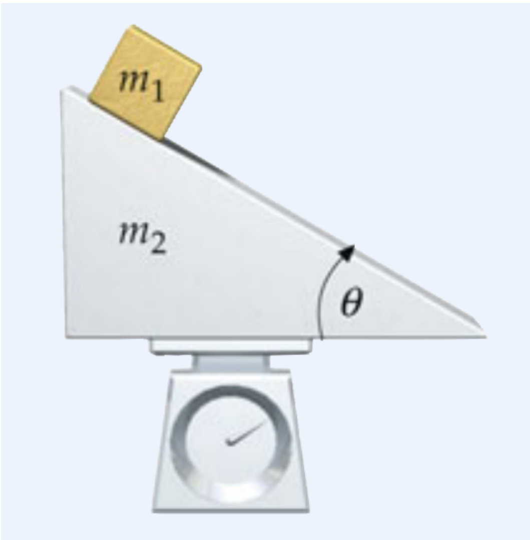

Abbildung 1

Lösung: Auf der Klotz wirken zwei Kräfte: die Gravitationskraft $F_\mathrm{G} = m_1 a$ in vertikaler Richtung; und die Normalkraft F_N in die Richtung senkrecht zu der schiefen Ebene. Betrachten wir jetzt die Kräfte und Beschleunigungen die auf Klotz in horizontalen (x) und vertikalen Richtung (y) wirken, $\Sigma F = ma$

$$\Sigma F_\mathrm{x} = F_\mathrm{N} \sin\theta = m_1 a_\mathrm{x} \tag{1}$$

$$\Sigma F_\mathrm{y} = F_\mathrm{N} \cos\theta - m_1 g = m_1 a_\mathrm{y} \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

Außerdem wissen wir, dass die Beschleunigung entlang die Ebene verläuft und nach unten gerichtet ist, bzw.: $a_\mathrm{x} = a\cos\theta$ und $a_\mathrm{y} = -a\sin\theta$. Mit der Gleichung 1 folgt für die Beschleunigung dann:

$$a = \frac{F_\mathrm{N}}{m_1}\tan\theta$$

und diese Beziehung können wir in die Gleichung 2 einsetzen. Das ergibt:

$$F_\mathrm{N}\cos\theta - m_1 g = -m_1 \sin\theta \frac{F_\mathrm{N}}{m_1}\tan\theta.$$

Nach sortieren erhalten wir:

$$F_\mathrm{N}(\cos\theta + \sin\theta\tan\theta) = m_1 g,$$

oder:

$$F_{\mathrm{N}} = m_1 g \cos\theta.$$

Hiermit kann dann a ausgerechnet werden:

$$a = \frac{m_1 g \cos\theta}{m_1} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = g \sin\theta.$$

Um die Anzeige auf der Waage zu berechnen, brauchen wir die vertikale Beschleunigung des Klotzes. Diese ist:

$$a_{\mathrm{y}} = -g \sin^2\theta.$$

Betrachten wir jetzt das Gesamtsystem von Klotz und Keil und schreiben die Kräfte und Beschleunigungen in vertikaler Richtung auf, erhalten wir:

$$\Sigma F_{\mathrm{y}} = F_{\mathrm{N}} - (m_1 + m_2)\, g = (m_1 + m_2)\, a_{\mathrm{S,y}}. \tag{4}$$

Hierbei ist anzumerken, dass die Normalkraft F_{N} hier *nicht* dieselbe Kraft ist wie die Normalkraft von eben, weil es hier um die Normalkraft geht, die von der Waage auf den Keil ausübt wird. Die vorherige Normalkraft wurde von dem Keil auf den Klotz ausgeübt.

Die Beschleunigung des Massenmittelpunkts $a_{\mathrm{S,y}}$ können wir von aus der vertikalen Position des Massenmittelpunkts ermitteln, die wie folgt berechnet werden kann:

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{S}}\, (m_1 + m_2) &= \Sigma y_{\mathrm{i}} m_{\mathrm{i}} \\ &= y_2 m_2 + y_1 m_1 \\ &= y_2 m_2 + y_{1,0} m_1 - \frac{1}{2} g \sin^2\theta t^2 m_1. \end{aligned}$$

wobei y_2 die vertikale Position von dem Massenschwerpunkt des Keils ist, $y_{1,0}$ die vertikale Anfangsposition des Massenschwerpunkts des Klotzes ist, und der hintere Term die vertikale Bewegung des Klotzes darstellt, berechnet durch: $y_2(t) = y_0 + \frac{1}{2} a_{\mathrm{y}} t^2$. Die zweite Ableitung nach der Zeit gibt dann die vertikale Beschleunigung des Gesamtmassenschwerpunkts:

$$\begin{aligned} a_{\mathrm{y,S}} &= \frac{\mathrm{d}^2 y_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t^2} \\ &= -\frac{g m_1 \sin^2\theta}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Diese Beschleunigung setzen wir jetzt in Gleichung 4 ein und bekommen die gesuchte Normalkraft:

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{N}} - (m_1 + m_2)\, g &= -\frac{g \sin^2\theta m_1}{m_1 + m_2} (m_1 + m_2) \\ F_{\mathrm{N}} &= -g \sin^2\theta m_1 + (m_1 + m_2)\, g \\ F_{\mathrm{N}} &= m_2 g + m_1 g \cos^2\theta. \end{aligned}$$

Waagen sind so geeicht, dass sie die Masse unter der Annahme von einer konstanten vertikalen Beschleunigung g anzeigen. Daher wird die Waage also die folgende Masse anzeigen: $m_2 + m_1 \cos^2\theta$.

2. Zwei gleiche Hockeypucks auf einem Luftkissentisch sind mit einem Faden verbunden (siehe Abbildung 2). Zu Beginn liegen die beiden Pucks, die jeweils die Masse m haben, ruhend in der gezeigten Anordnung auf dem Tisch. Nun wird das System von einer konstanten Kraft mit dem Betrag $|\vec{F}|$ nach rechts beschleunigt. Nachdem sich der Angriffspunkt P der Kraft eine Strecke d bewegt hat, stoßen die Pucks zusammen und bleiben aneinanderhaften. Welchen Geschwindigkeitsbetrag haben die Pucks unmittelbar nach dem Zusammenstoß?

Lösung: Weil die geleistete Arbeit von der Kraft F gleich groß ist, wie die kinetische Energie des

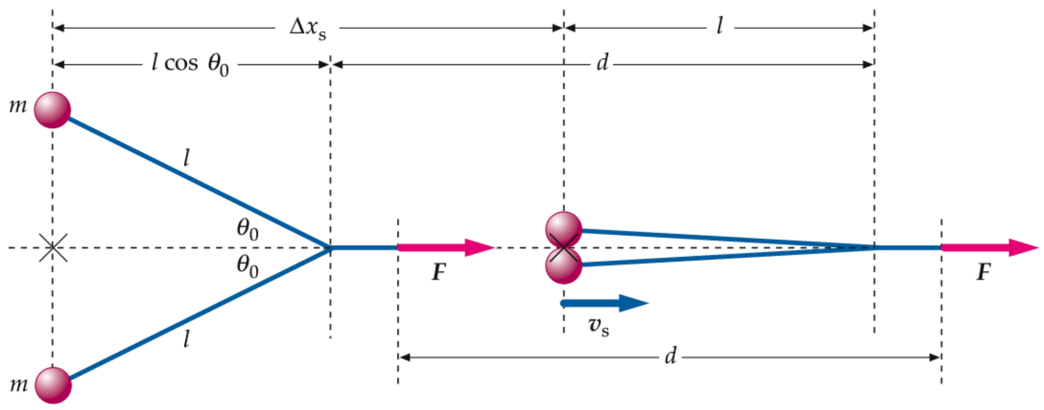

Abbildung 2

Systems, gilt:

$$F \Delta x_{\mathrm{S}} = \frac{1}{2} 2 m v_{\mathrm{S}}^2.$$

Hierbei ist *nicht* der Abstand d über den die Kraft F gearbeitet hat relevant, sondern der Abstand Δx_{S} über den der Massenschwerpunkt verschoben worden ist. Die Gesamtmasse beträgt $2m$, weil sich das Gesamtsystem aus zwei Pucks mit den Einzelmassen m zusammensetzt.

Aus der Abbildung 2 folgt einfach, dass $\Delta x_{\mathrm{S}} = d + l \cos \theta_0 - l$ und deshalb ergibt sich die Endgeschwindigkeit zu:

$$v_{\mathrm{S}} = \sqrt{\frac{F\,(d - l + l \cos \theta)}{m}}.$$