

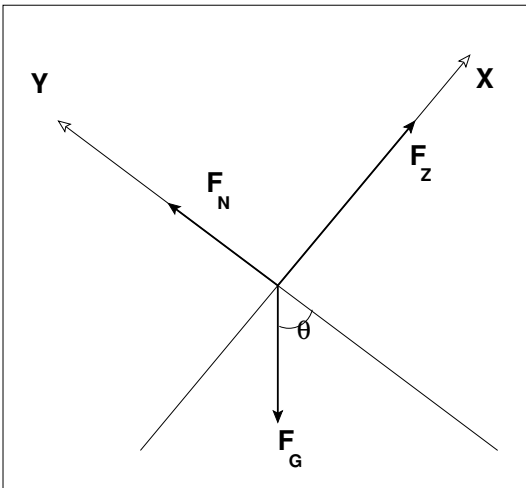
Einführung in die Physik I (für Nicht-PhysikerInnen)

Hausaufgaben Woche 4

9 Oktober - 02 November 2018

1. Ein Block wird auf einer reibungsfreien Neigung durch ein Kabel still gehalten.

Lösung: Die Kräfte, die auf den Block einwirken, können wie folgt dargestellt werden:



- (a) Wie groß sind die Zugkraft im Kabel und die von der Neigung ausgeübte Normalkraft, wenn $\theta = 60^\circ$ und $m = 50 \text{ kg}$?

Lösung: Der Block wird durch die auf ihn wirkenden Kräfte im Gleichgewicht gehalten. Daher gilt $\vec{F}_Z + \vec{F}_N + \vec{F}_G$, wobei \vec{F}_Z die Zugkraft, \vec{F}_N die Normalkraft und \vec{F}_G die Gravitationskraft ist. Wählen wir ein Koordinatensystem mit der positiven X -Richtung entlang der Zugkraft und der positiven Y -Richtung entlang der Normalkraft. Dann können wir in der X -Richtung die folgende Gleichung angeben:

$$\Sigma_i F_{x,i} = m a_x,$$

mit $a_x = 0$ weil der Block still gehalten wird. Zerlegen wir dann die Gravitationskraft, wie in der obenstehenden Figur gezeigt, bekommen wir:

$$F_Z = F_G \cdot \sin \theta$$

Mit der Gravitationskraft gegeben als $F_G = m \cdot g$ mit $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ und $m = 50 \text{ kg}$ erhalten wir:

$$F_Z = 424,78 \text{ N}.$$

Weil es nur zwei signifikante Stellen gibt ist die Lösung:

$$F_Z = 4,2 \times 10^2 \text{ N}.$$

Neben der Zugkraft war auch nach der Normalkraft gefragt. Hierzu betrachten wir die Kräfte in Y -Richtung:

$$\begin{aligned} \Sigma_i F_{y,i} &= m \cdot a_y \\ F_N - F_G \cdot \cos(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

und mit $F_G = m \cdot g$ ergibt sich:

$$F_N = F_G \cdot \cos \theta = m \cdot g \cdot \cos \theta = 245,25 \text{ N.}$$

Mit zwei signifikanten Stellen lautet die Antwort also:

$$F_N = 2,5 \times 10^2 \text{ N.}$$

- (b) Ermitteln Sie die Zugkraft als Funktion von θ und m und überprüfen Sie ihr Ergebnis für die Spezialfälle $\theta = 0^\circ$ und $\theta = 90^\circ$ auf Plausibilität.

Lösung: Die Antwort folgt direkt aus Aufgabeteil a:

$$F_Z = m \cdot g \cdot \sin \theta.$$

Für den Fall, dass $\theta = 0$ bekommen wir $F_Z = 0$. Was auch Sinn macht, da der Block in diesem Fall einfach horizontal auf der Erde liegt.

Wenn $\theta = 90^\circ$ wird $F_Z = m \cdot g = F_G$. D.h. die Zugkraft ist jetzt gleich der Schwerkraft, was zu erwarten war, weil der Block jetzt völlig vertikal an dem Kabel hängt.

2. Der Ortsvektor eines Teilchens mit Masse $m = 0,80 \text{ kg}$ sei als Funktion der Zeit gegeben durch:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\hat{x} + y\hat{y} \\ &= (R \cos(\omega t))\hat{x} + (R \sin(\omega t))\hat{y}, \end{aligned}$$

wobei $R = 4,0 \text{ m}$ und $\omega = 2\pi \text{ s}^{-1}$ ist.

- (a) Zeigen Sie, dass der Weg des Teilchens eine Kreisbahn mit dem Radius R ist, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung der $X - Y$ -Ebene liegt.

Lösung: Falls das Teilchen einer Kreisbahn um den Ursprung folgt, sollte der Abstand des Teilchens zum Ursprung, bzw. die Länge des Ortsvektors, ständig konstant sein. Wir können die Länge des Ortsvektors einfach berechnen:

$$\begin{aligned} |\vec{r}| &= \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \\ &= \sqrt{R^2 \cos^2(\omega t) + R^2 \sin^2(\omega t)} \\ &= \sqrt{R^2 (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))} \\ &= R\sqrt{1} = R. \end{aligned}$$

Das beweist nur, dass die Position des Teilchens *Teil* einer Kreisbahn mit Radius R ist, nicht aber dass es sich wirklich um eine vollständige Kreisbewegung handelt. Dazu müssen wir noch überprüfen ob die Richtung des Ortsvektors alle Winkel (von 0° bis 360°) durchläuft. Die Richtung des Ortsvektors ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan\left(\frac{r_y}{r_x}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{R \sin(\omega t)}{R \cos(\omega t)}\right) \\ &= \arctan(\tan(\omega t)) \\ &= \omega t. \end{aligned}$$

Es folgt, dass der Ortsvektor in alle mögliche Richtungen dreht und dass das Teilchen somit einer Kreisbahn folgt.

- (b) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor und zeigen Sie, dass $v_x/v_y = -y/x$ gilt.

Lösung: Den Geschwindigkeitsvektor können wir berechnen durch die Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit:

$$\begin{aligned}v_x(t) &= \frac{dx}{dt} = -R\omega \sin(\omega t) \\v_y(t) &= \frac{dy}{dt} = R\omega \cos(\omega t).\end{aligned}$$

Es folgt also:

$$\frac{v_x}{v_y} = \frac{-R\omega \sin(\omega t)}{R\omega \cos(\omega t)} = \frac{-\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)} = -\tan(\omega t).$$

Weil gegeben war, dass $x = R \cos(\omega t)$ und $y = R \sin(\omega t)$, wissen wir außerdem:

$$\frac{-y}{x} = \frac{-R \sin(\omega t)}{R \cos(\omega t)} = -\tan(\omega t).$$

Es gilt deshalb tatsächlich: $v_x/v_y = -y/x$.

- (c) Berechnen Sie den Beschleunigungsvektor und zeigen Sie, dass er zum Koordinatenursprung hin gerichtet ist und den Betrag v^2/R besitzt.

Lösung: Den Beschleunigungsvektor berechnen wir durch ableiten des Geschwindigkeitsvektors:

$$\begin{aligned}a_x(t) &= \frac{dv_x}{dt} = -R\omega^2 \cos(\omega t) \\a_y(t) &= \frac{dv_y}{dt} = -R\omega^2 \sin(\omega t).\end{aligned}$$

Dieser Vektor ist fast gleich dem Ortsvektor (nur der Betrag ist um einen Faktor ω^2 größer), hat aber die umgekehrten Vorzeichen in beiden Richtungen X und Y. Das bedeutet, dass er in beiden Richtungen die umgekehrte Richtung aufweist im Vergleich mit dem Ortsvektor. Weil der Ortsvektor vom Ursprung zum Teilchen gerichtet ist, muss der Beschleunigungsvektor also vom Teilchen zum Ursprung gerichtet sein.

Den Betrag des Beschleunigungsvektors können wir einfach berechnen:

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\&= \sqrt{R^2\omega^4 \cos^2(\omega t) + R^2\omega^4 \sin^2(\omega t)} \\&= R\omega^2 \sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} \\&= R\omega^2 = 1,6 \times 10^2 \text{ m/s}^2.\end{aligned}$$

Außerdem ist die Winkelgeschwindigkeit ω gegeben in Radianten pro Sekunde und weil ein Radiant gleich R ist, ist die Geschwindigkeit gleich $R\omega$ (in m/s). Der Betrag von \vec{a} kann dann wie folgt umgeschrieben werden:

$$|\vec{a}| = R\omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{R}.$$

- (d) Ermitteln Sie Richtung und Betrag der Gesamtkraft, die auf das Teilchen wirkt.

Lösung: Newton's zweites Axiom besagt, dass die Gesamtkraft aus der Beschleunigung berechnet werden kann:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Somit ist die Richtung der Gesamtkraft vom Teilchen zum Ursprung (gleich der Richtung der Beschleunigung). Und der Betrag der Gesamtkraft ist:

$$|\vec{F}| = m \cdot R \cdot \omega^2 = 126 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2,$$

also $1,3 \times 10^2 \text{ N}$.