Einführung in die Physik I (für Nicht-PhysikerInnen)
Lösungen Präsenzübungen Woche 3

22-26 Oktober 2018

1

Eine Wanduhr hat einen 0,50 m langen Minutenzeiger und einen 0,25 m langen Stundenzeiger. Mit welchem Beschleunigungsbetrag wird die Spitze des Minutenzeigers dieser Uhr beschleunigt? Drücken Sie den Betrag als Bruchteil der Erdbeschleunigung ($g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$) aus.

Lösung:
Für die gleichförmige Kreisbewegung ist die Zentripetalbeschleunigung gegeben durch:

$$a_{\mathrm{ZP}} = \frac{v^2}{r}.$$

Die Geschwindigkeit der Spitze des Minutenzeigers können wir berechnen mit der Periode $P = 3600\,\mathrm{s}$ und dem Radius $r = 0,50\,\mathrm{m}$:

$$v = \frac{2\pi r}{P} = 8,73 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m/s}.$$

Beachte, dass es nur zwei signifikante Stellen gibt (0,50 m). Wir behalten jedoch zunächst drei Stellen und werden erst ganz am Ende auf zwei abrunden, damit sich die Rundungsfehler nicht anhäufen.

Hiermit ergibt sich die Beschleunigung:

$$a = \frac{\left(8,73 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m/s}\right)^2}{0,50\,\mathrm{m}} = 1,5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}.$$

Als Bruchteil der Erdbeschleunigung g ist dies:

$$\frac{a}{g} = \frac{1,52 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}}{9,81\,\mathrm{m/s^2}} = 1,6 \cdot 10^{-7},$$

also völlig vernachlässigbar im Vergleich zur Erdbeschleunigung.

2

Ein Wildhüter mit einem Betäubungsgewehr möchte einen Affen schießen, der an einem Ast hängt. Der Wildhüter richtet den Gewehrlauf direkt auf den Affen. Dabei beachtet er nicht, dass der Pfeil eine Parabelbahn beschreiben und daher unterhalb der jetzigen Lage des Affen vorbeifliegen würde. Der Affe sieht, wie der Pfeil abgeschossen wird. Er lässt sich sofort fallen – in der Hoffnung, so dem Pfeil zu entgehen.

a) Zeigen Sie, dass der Affe unabhängig von der Anfangsgeschwindigkeit des Pfeils getroffen wird, solange diese ausreicht, damit der Pfeil die horizontale Entfernung bis zum Baum überwindet. Die Reaktionszeit des Affen ist zu vernachlässigen, ebenso wie der Luftwiderstand.

b) $v_{\mathrm{P},0}$ sei die Geschwindigkeit des Pfeils in Bezug auf den Affen beim Verlassen des Gewehrs. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Pfeils in Bezug auf den Affen zu einem beliebigen Zeitpunkt t während der Flugzeit des Pfeils?

c) Falls die horizontale Entfernung zwischen Wildhüter und Affe (bzw. der Abstand zwischen Hüter und Baum) 50 m ist und die Höhe des Affen zu Beginn 10 m, welche Abschussgeschwindigkeit muss der Pfeil dann mindestens haben, um den Affen zu erreichen? (Die Höhe des Gewehrs vernachlässigen wir.)

Lösung:

a)

Der Affe fällt aus der Position $(x_{\text{Affe}}, y_{\text{Affe}}) = (D, h)$ herunter, wobei D der horizontale Abstand zwischen dem Hüter und dem Baum und h die Höhe des Affen am Anfang ist. Der Affe bewegt sich nur vertikal und ohne Anfangsgeschwindigkeit. Deshalb ist seine Bewegungsgleichung:

$$x_{\text{Affe}}(t) = D; y_{\text{Affe}}(t) = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Der Pfeil hat als Anfangsposition $(x_{\text{Pfeil}}, y_{\text{Pfeil}}) = (0, 0)$ und bewegt sich wie beim schrägen Wurf auf einer Parabelbahn mit Geschwindigkeit $\vec{v}$, Abschusswinkel θ und Beschleunigung $a_{\vec{\text{Pfeil}}} = -g\hat{\vec{y}}$. Deshalb sind seine Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} x_{\text{Pfeil}} &= v \cdot \cos(\theta) \cdot t; \\ y_{\text{Pfeil}} &= v \cdot \sin(\theta) \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}$$

Berechnen wir jetzt, wann der Pfeil den Abstand D in $x-$Richtung zurückgelegt hat:

$$\begin{aligned} x_{\text{Pfeil}} \quad = \quad D &= v \cdot \cos(\theta) \cdot t; \\ t &= \frac{D}{v \cdot \cos\theta}. \end{aligned}$$

Nun können wir die Höhen des Affen und des Pfeils an diesem Zeitpunkt berechnen:

$$\begin{aligned} y_{\text{Affe}}\left(t = \frac{D}{v \cdot \cos\theta}\right) &= h - \frac{g}{2}\frac{D^2}{v^2\cos^2\theta}; \\ y_{\text{Pfeil}}\left(t = \frac{D}{v \cdot \cos\theta}\right) &= v\sin\theta\frac{D}{v\cos\theta} - \frac{g}{2}\frac{D^2}{v^2\cos^2\theta} \quad = \quad D\tan\theta - \frac{g}{2}\frac{D^2}{v^2\cos^2\theta}. \end{aligned}$$

Außerdem wissen wird, dass der Schuss auf den Affen gerichtet ist. Dies bedeutet, dass θ bestimmt ist wie folgt: $\tan\theta = h/D$. Damit erhalten wir für die Höhe des Pfeils:

$$y_{\text{Pfeil}}\left(t = \frac{D}{v \cdot \cos\theta}\right) = h - \frac{g}{2}\frac{D^2}{v^2\cos^2\theta}.$$

Beachte, dass jetzt: $y_{\text{Pfeil}} = y_{\text{Affe}}$ zum Zeitpunkt, an dem $x_{\text{Pfeil}} = D$. Das heißt, dass der Pfeil *immer* den Affen trifft!

b)

Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Ortes nach der Zeit. Für den Pfeil ist die Geschwindigkeit deshalb in x- bzw. y-Richtung:

$$\begin{aligned} v_{\text{Pfeil,x}}(t) &= v_{\text{P},0} \cdot \cos\theta \\ v_{\text{Pfeil,y}}(t) &= v_{\text{P},0} \cdot \sin\theta - g \cdot t \end{aligned}$$

und für den Affen:

$$v_{\text{Affe,y}}(t) = -g \cdot t,$$

und $v_{\text{Affe,x}}(t) = 0$.

Um die Relativgeschwindigkeit (bzw. die Geschwindigkeit des Pfeils in Bezug auf den Affen) zu erhalten, ziehen wir die Geschwindigkeit des Affen von die Geschwindigkeit des Pfeils ab. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_{\text{Rel,x}}(t) &= v_{\text{P},0} \cdot \cos\theta \\ v_{\text{Rel,y}}(t) &= v_{\text{P},0} \cdot \sin\theta. \end{aligned}$$

Der Betrag der Relativgeschwindigkeit ist deshalb:

$$\begin{aligned} v_{\text{Rel}}(t) &= \sqrt{v_{\text{Rel,x}}^2 + v_{\text{Rel,y}}^2} \\ &= v_{\text{P},0}\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \\ &= v_{\text{P},0}. \end{aligned}$$

Die Relativgeschwindigkeit des Pfeils in Bezug auf den Affen ist also immer gleich und unabhängig von der vertikalen Beschleunigung des Affen und des Pfeils.

c)
Es gilt nun: $D = 50\,\text{m}$ und $h = 10\,\text{m}$ und gesucht wird die Mindestgeschwindigkeit v die der Pfeil haben muss, um den Abstand D zu überbrücken.

Dazu berechnen wir zuerst den Zeitpunkt, an dem der Pfeil den Affen auf Bodenhöhe ($y_{\text{Pfeil}} = y_{\text{Affe}} = 0$) trifft. Aus der Bewegungsgleichung des Pfeils in $y-$Richtung erhalten wir:

$$y_{\text{Pfeil}} = 0 = t \cdot \left(v\sin(\theta) - \frac{gt}{2} \right).$$

Wir müssen also die folgende Gleichung lösen:

$$v\sin(\theta) = \frac{gt}{2}$$

und finden:

$$t = \frac{2v\sin(\theta)}{g}.$$

Damit gilt außerdem:

$$x_{\text{Pfeil}} = D = v\cos(\theta)\frac{2v\sin(\theta)}{g}$$

Diese Gleichung lösen wir für v:

$$v^2 = \frac{Dg}{2\cos(\theta)\sin(\theta)}$$

$$v = \sqrt{\frac{Dg}{2\cos(\theta)\sin(\theta)}} = \sqrt{\frac{Dg}{\sin(2\theta)}}.$$

Mit $D = 50\,\text{m}$ und $h = 10\,\text{m}$ können wir θ berechnen:

$$\theta = \arctan(h/D) = 11,3^\circ.$$

Wir erhalten deshalb:

$$v = 36\,\text{m/s}.$$

Also: solange die Abschussgeschwindigkeit mehr als $36\,\text{m/s}$ beträgt, wird der Pfeil den Affen treffen. Mit einer niedrigeren Geschwindigkeit wird der Pfeil den Baum (und den Affen) nicht erreichen können.