Beh: Genauso, wenn $f(x), g(x) \to \infty$ für $x \to x_0$.

Bew: weggelassen (nicht schwierig).

Beisp: $\underbrace{f(x) = -\ln x}_{\to\infty \text{ für } x\to 0}$, $\underbrace{g(x) = x^{-\alpha}}_{\text{ebenso}}$ $(\alpha > 0)$, $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{(-\ln x)'}^{= -\frac{1}{x}}}{\underbrace{(x^{-\alpha})'}_{\overset{\ddot{U}}{=} -\alpha x^{-\alpha-1} = -\alpha \frac{1}{x^{\alpha+1}}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{x}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0} x^{\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x^{\alpha} \ln x = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \underbrace{x^{x}}_{e^{x\ln x \to 0}} = e^{0} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} x^{x} = 1$$

Daher ist Def. $0^0 := 1$ sinnvoll!

Beh: Genauso, wenn $x \to \infty$.

Bew: weggelassen (nicht schwierig)

Beisp:

1.) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \underset{\alpha>0}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{(\ln x)'}^{=\frac{1}{x}}}{\underbrace{(x^\alpha)'}_{\alpha x^{\alpha-1} = \alpha x^\alpha \cdot \frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\ln x$ wächst langsamer als $x^\alpha$ $\forall \alpha > 0$

2.) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} \underset{\alpha>0}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x}}_{\frac{x^\alpha}{e^x}\cdot\frac{\alpha}{x}} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} \underbrace{\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)}_{\to 1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

$\Leftrightarrow$ $e^x$ wächst schneller als $x^\alpha$ $\forall \alpha > 0$

# 10 Komplexe Zahlen

[ Schule: Man beginnt mit $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}_0$, aber z.B. $1+x=0$ hat dann keine Lösung $\Rightarrow$ erfinde „neue Zahl" $-1$ mit der Eigenschaft $1+(-1)=0$. Nimm auch noch $-m := (-1)\cdot m$ $\forall\, m \in \mathbb{N}_0$ dazu (sowie alle bisherigen $n \in \mathbb{N}_0$) $\Rightarrow \mathbb{Z}$ (ganze Zahlen). Damit kann man dann „wie gewohnt" rechnen und macht sich bald keine Gedanken mehr dazu

(gibt es „die Zahl $-1$" überhaupt? „Gesehen" hat sie noch niemand. Ist sie eindeutig? Ansonsten: welche wählen? ...)

Hier analog: ]

In $\mathbb{R}$ hat $1+x^2=0$ keine Lösung $\Rightarrow$ erfinde „neue Zahl"

<u>$i$ (imaginäre Einheit)</u> mit der Eigenschaft $1+i^2=0$ bzw.

$$\boxed{\underbrace{i^2}_{i\cdot i} = -1}.$$

Nimm auch noch $i\cdot y \;\forall\, y \in \mathbb{R}$ dazu (sowie alle bisherigen $x \in \mathbb{R}$ sowie Kombinationen von Beiden) $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{\mathbb{C} := \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}}} \quad (\text{komplexe Zahlen})$$

und rechne ansonsten einfach weiter „wie gewohnt".

Bem:

- Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich also schreiben als

$$\underline{\underline{z = x + iy}}$$

mit eindeutigen $x, y \in \mathbb{R}$. Insbes. sind zwei Zahlen

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ gleich, d.h. $\underline{\underline{z_1 = z_2}}$

$\iff$ $x_1 = x_2$ <u>und gleichzeitig</u> $y_1 = y_2$.

- Bezeichnungen:

$\underline{\underline{x = \mathrm{Re}(z)}}$ „Realteil von z" $(\in \mathbb{R})$

$\underline{\underline{y = \mathrm{Im}(z)}}$ „Imaginärteil von z" $(\in \mathbb{R})$

d.h. $\underline{\underline{z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)}}$

$z$ „rein reell" $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

$z$ „rein imaginär" $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0$ (und $\mathrm{Im}(z) \neq 0$).

- Weitere Defs. für bel. $z = x+iy \in \mathbb{C}$:

$z^* := x - iy$ „komplexe Konjugation"

$|z| := \sqrt{x^2+y^2}$ „Betrag"

Falls $z \in \mathbb{R} \Rightarrow y=0$ (s. oben) $\Rightarrow |z| = \sqrt{x^2} \hat{=}$ „reeller Betrag" ✓

Beisp:

1.) $z_1 = 1+2i \quad , \quad z_2 = 2-i$

$\Rightarrow \underline{\underline{z_1 + z_2}} = 1+2i + 2-i = \underline{\underline{3+i}}$

$\underline{\underline{z_1 \cdot z_2}} = (1+2i)(2-i) = 2 - i + 4i - 2\underbrace{i^2}_{-1} = 2 + 3i - 2(-1) = \underline{\underline{4+3i}}$

$\underline{\underline{z_1 / z_2}} = \dfrac{1+2i}{2-i} \cdot \overbrace{\dfrac{2+i}{2+i}}^{1} = \dfrac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{2+i+4i+2i^2}{2^2-i^2}$

$= \dfrac{2+5i+2(-1)}{4-(-1)} = \dfrac{5i}{5} = \underline{\underline{i}}$

Probe: $z_2 \cdot i = 2i - i^2 = 2i+1 = z_1$ ✓

$Re(z_1) = 1$

$Im(z_1) = 2$

$z_1^* = 1-2i$

$|z_1| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

2.) $z_1 = x_1 + iy_1$ , $z_2 = x_2 + iy_2$

$$\Rightarrow \underline{z_1 + z_2} = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = \underline{x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)}$$

d.h. $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = x_1 + x_2$

$\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = y_1 + y_2$

$$\underline{z_1 \cdot z_2} = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) =$$

$$= x_1 x_2 + x_1 iy_2 + iy_2 x_2 + i^2 y_1 y_2 =$$

$$= \underline{\underbrace{x_1 x_2 - y_1 y_2}_{\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2)} + i \underbrace{(x_1 y_2 + x_2 y_1)}_{\mathrm{Im}(z_1 \cdot z_2)}}$$

3.) $z = x + iy$ , $z \neq 0$ (d.h. $x = y = 0$ ausgeschlossen)

$$\Rightarrow \underline{\underline{z^{-1} := \frac{1}{z}}} = \frac{1}{x+iy} \cdot \underbrace{\frac{x-iy}{x-iy}}_{=1}$$

$$= \frac{x-iy}{x^2 - \underbrace{(iy)^2}_{=i^2y^2=-y^2}} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$= \underline{\underline{\underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{=\mathrm{Re}(z^{-1})} + i \underbrace{\frac{(-y)}{x^2+y^2}}_{=\mathrm{Im}(z^{-1})}}}$$

Nochmals: alle „Rechenregeln" (sog. Körperaxiome) sind in $\mathbb{C}$ genau gleich wie in $\mathbb{R}$, nur die „Zahlenmengen" $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$ sind unterschiedlich $\Rightarrow$ alle in $\mathbb{R}$ gültigen „Formeln" gelten weiterhin in $\mathbb{C}$ ! z.B.

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \quad \forall\, z \neq 1 \;,\; n \in \mathbb{N} \quad \text{(geom. Reihe)}$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \quad \forall\, x,y \in \mathbb{C} \quad \text{(binom. Formel)}$$

usw.

Auch die Grundeigenschaften des „Betrags" sind genau gleich:

- $|z| > 0$ falls $z \neq 0$ und $|z| = 0$ falls $z = 0$.
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Bew: Ü).

Andererseits: Für bel. $x, y \in \mathbb{R}$ gilt entweder $x > y$ oder $x = y$ oder

$x < y$ (Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$).

Auf $\mathbb{C}$ gibt es keine solche Ordnungsstruktur!

(Grund: jede solche Struktur würde $-1 = i^2 \geq 0$ implizieren.)

$\Leftarrow$ die Zeichen „>" und „<" sind auf $\mathbb{C}$ nicht definiert

bzw. sinnlos!

## 10.1 Komplexe Funktionen

[Ist grosses eigenes Gebiet. Hier nur kleine Auswahl.]

1.) $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto P(z) := \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \quad , \; c_k \in \mathbb{C} \, , \; c_n \neq 0 \, , \; n \in \mathbb{N}_0$$

(Polynom n-ter Ordn.)

Satz: Es existieren n Zahlen $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ so, dass

$$P(z) = c_n (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

Bew: Mathem.-Vorl.

Bem:

- $z_1, \ldots, z_n$ sind die Nullstellen von $P(z)$

  (müssen nicht unbedingt alle verschieden sein: sog. Mehrfachnullst.).

- In $\mathbb{R}$ gibt es keinen solchen Satz!

Nur sagen:

- Allg. Formeln, wie man die $z_k$'s aus den $a_k$'s erhält:

  einfach für $n = 1, 2$; kompliziert für $n = 3, 4$; kann es nicht geben für $n \geq 5$.

- Graphische Darstellung: kompliziert / nutzlos.

2.) Folgen, Reihen, Potenzreihen und deren Konvergenz:

(fast) Wort für Wort wie „im Reellen."

Insbes.:

$$\underline{\underline{\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}}} \quad \left(\text{konvergiert } \forall z \in \mathbb{C}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)} \quad \forall z_{1,2} \in \mathbb{C}$$

u.s.w.

3.) Potenzen für Basis $\underline{b \in \mathbb{R}^+}$ wie bisher:

$$\underline{b^z := \exp(z \ln b)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

[↑ „reeller Log."]

$$\Rightarrow \quad \underline{e^z = \exp(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

- Ferner: $z^n := \underbrace{z z \cdots z}_{n \text{ Stück}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, z \in \mathbb{C}$ 
  $z^{-n} := 1/z^n$ } „wie immer"

- $b^z$ für bel. $b, z \in \mathbb{C}$ → Kap. 10.2

4.) „Einheitskreis" gibt es nicht mehr in $\mathbb{C}$! Daher jetzt Def.:

$$\underline{\underline{\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}}} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\underline{\underline{\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}}} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

- Für $z \in \mathbb{R}$ genau wie bisher!
- Keine einfache „graphische Darstellung" mehr!
- $(-z)^{2k} = \underbrace{(-1)^{2k}}_{((-1)^2)^k = 1} z^{2k} = z^{2k} \Rightarrow (-z)^{2k+1} = (-1)\underbrace{(-1)^{2k}}_{1} z^{2k+1} = -z^{2k+1}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\sin(-z) = -\sin(z)} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\underline{\underline{\cos(-z) = \cos(z)}} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

5.) $(i)^{2k} = (\underbrace{i^2}_{-1})^k = (-1)^k$

$\Rightarrow \quad (iz)^{2k} = (-1)^k z^{2k} \quad , \quad (iz)^{2k+1} = i(-1)^k z^{2k+1}$

$$\Rightarrow \quad e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \dots + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overbrace{(iz)^{2k}}^{(-1)^k z^{2k}}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overbrace{(iz)^{2k+1}}^{i(-1)^k z^{2k+1}}}{(2k+1)!}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}}_{\cos(z)} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin(z)}$$

$$\boxed{e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Euler-Formel