9. Taylor-Reihen

Frage: Wie gut kann man eine Fkt. $f(x)$ mittels Polynome approximieren und mittels Potenzreihen [„unendl. Polynome"] ev. sogar exakt reproduzieren? (Vgl. Ende Kap. 3.4).

Beisp:

Geom. Reihe: $\frac{1}{1-r} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \quad \forall\ |r|<1$ (Kap. 5.2)

$\Rightarrow$ Die Fkt. $f(x) := \frac{1}{1-ax}$ lässt sich auch schreiben als

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (ax)^k \quad \text{falls } |ax|<1 \iff |x| < \frac{1}{|a|} \quad \text{oder}$$

mit $c_k := a^k$ als

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad \text{(Potenzreihe).}$$

$\sim$

Nehmen wir also einmal an:

(i) $f(x)$ kann als Potenzreihe geschrieben werden (d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \text{ für geeignet gewählte } c_k)$$

(ii) $f(x)$ ist bel. oft diff'bar.

$$0^0 := 1, \quad 0^k = 0 \ \forall k \geq 1$$

$$\Rightarrow f(0) = c_0 \cdot 1$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \underbrace{k}_{0 \text{ für } k=0} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1}$$

$$\Rightarrow f'(0) = c_1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot k \cdot \underbrace{(k-1)}_{0 \text{ für } k=1} x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k (k-1) x^{k-2}$$

$$\Rightarrow f''(0) = c_2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$$

usw:
$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k \cdot k \cdot (k-1) \cdots (k-n+1) x^{k-n}$$

$$f^{(n)}(0) = c_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots 1 \cdot 1 = c_n \cdot n!$$

$$\Rightarrow \quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \quad \Leftrightarrow \quad c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}$$

(„Taylor-Reihe" oder „Taylor-Entwicklung um 0")

[oder „Taylor-Formel"]

Beisp:

1.) $f(x) := \exp(x+y)$, $y \in \mathbb{R}$ bel. aber fest.

$\Rightarrow$ (ii) erfüllt, (i) später.

$$f'(x) = \exp(x+y) \cdot \underbrace{(x+y)'}_{=1} = f(x)$$

$$\Rightarrow f^{(k)}(x) = f(x) \quad \forall k \quad \Rightarrow f^{(k)}(0) = f(0) = \exp(y) \quad \forall k$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \exp(y) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}_{\exp(x)}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$\triangleq$ in Kap. 5.4 versprochener Bew!

[kein Zirkelschluss: nur Def. von $\exp(x)$ und Ableitungsregeln benutzt]

2.) $f(x) := \sin x \Rightarrow$ (ii) ✓, (i) später.

$\Rightarrow f'(x) = \cos x\,,\ f''(x) = -\sin x\,,\ f'''(x) = -\cos x\,,\ f^{(4)}(x) = \sin x$ usw.

$\Rightarrow f(0) = 0\,,\ f'(0) = 1\,,\ f''(0) = 0\,,\ f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(0) = 0\,,$ u.s.w.

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{1}{1!}x^1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^5 + \ldots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(2j+1)!} x^{2j+1}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

(so macht's der Taschenrechner!)

3.) Viele weitere Beisp. in Übungen, z.B.

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$\sim$

<u>Frage 1</u>: Wie gut lässt sich $f(x)$ approximieren durch

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$ („Taylor-Polynom") ?

[„abgebrochene Taylor-Reihe"]

<u>Frage 2</u>: $p_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$?

Antwort steckt im

<u>Satz von Taylor</u>:

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x)$$

wo $r_n(x) := \frac{f^{n+1}(z)}{(n+1)!} x^{n+1}$ („Restglied")

für ein geeignet gewähltes z zwischen 0 und x.

(falls $f(x)$ hinreichend oft diff'bar).

Bew.: später (Kap. 11).

$\Rightarrow$ Antwort 1: $|f(x) - p_n(x)| = |r_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(z)|$

Antwort 2: $p_n(x) \to f(x) \iff r_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$

(präzisiert bzw ersetzt (i)).

Bem: Falls für alle z zwischen 0 und x gilt:

$|f^{(n)}(z)| \le a \cdot q^n$ für geeignet gewählte $a, q \in \mathbb{R}^+$,

dann folgt $|r_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} a\, q^{n+1} = a \frac{|q x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$

für $n \to \infty$ (sonst würde $\exp(|qx|) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|qx|^k}{k!}$ nicht

konvergieren!).

Beisp 1: $f^{(n)}(x) = f(x) = \exp(x+y) \Rightarrow$ wähle $a = \exp(|x|+|y|)$ und $q = 1$.

Beisp 2: $|f^{(n)}(x)| = \underbrace{|\sin x|}_{\le 1}$ oder $\underbrace{|\cos x|}_{\le 1} \Rightarrow$ wähle $a = 1$, $q = 1$.

Bem:

- Ableitungen von $f(x)$ bei $x=0$ legen also $f(x)$ bereits fest!
- Ziemlich offensichtlich: je kleiner x, desto schneller wird $r_n(x)$ klein.
- Im Allg. hängt z im Restglied von x und von n ab.
- Genauere Angabe von z meist schwierig und gar nicht benötigt.
- „Physiker-Schreibweise":

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\mathcal{O}(x^{n+1})}$$

„Term (bzw. „Fehler") der Ordnung x^{n+1}"

d.h. dieser Term strebt für kleine x (bzw $|x|$) mindestens genau so rapide nach 0 wie x^{n+1}.

- Betrachte „Hilfsfkt." $g(x) := f(x+x_0)$ mit einem bel. „Referenzpkt." x_0.

$$\Rightarrow \quad g(0) = f(x_0)\,,\quad g'(0) = f'(x_0)\,,\quad \ldots\,,\quad g^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overbrace{g^{(k)}(0)}^{= f^{(k)}(x_0)}}{k!}\, x^k$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{f(x+x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\, x^k}}$$

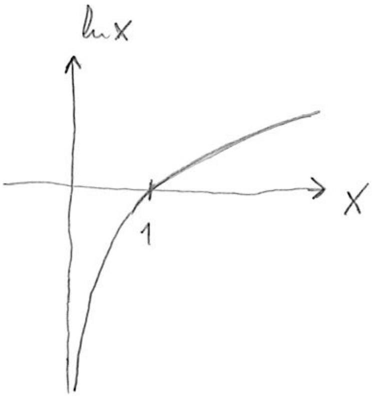
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k} \qquad \text{(Taylor-Entwicklung um } x_0\text{)},$$

analog: $P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$,

$r_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ mit z zwischen x_0 und x,

usw.

Beisp:



$$f(x) := \ln x \quad , \quad x_0 = 1$$

$$\Rightarrow f(x_0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x_0) = 1$$

$$f''(x) = \left(x^{-1}\right)' = (-1)\,x^{-2} \quad , \quad f''(x_0) = -1$$

$$f'''(x) = (-1)\underbrace{\left(x^{-2}\right)'}_{(-2)\,x^{-3}} = 2\,x^{-3} \Rightarrow f'''(x_0) = 2$$ usw.

$$\Rightarrow f(x+x_0) = \underbrace{f(x_0)}_{0} + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!}}_{1} x + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}}_{-\frac{1}{2}} x^2 + \underbrace{\frac{f'''(x_0)}{3!}}_{\frac{1}{3}} x^3 + \dots$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^4 + \dots$$

Genauere Betrachtung: Konvergenz $\left(\text{d.h. } r_n(x) \to 0 \right) \Leftrightarrow |x| < 1$.

Aber: jedes $y > \frac{1}{2}$ lässt sich schreiben als $y = \frac{1}{1+x}$ mit $|x| < 1$.

Wegen $\ln \Big(\underbrace{\frac{1}{1+x}}_{(1+x)^{-1}} \Big) = - \ln(1+x)$ erhält man so auch $\ln y \ \forall \ y > 1/2$.

[auch Taschenrechner macht das (im Prinzip) so]

Weitere Beisp: Ü

Anwendung

Frage: Wenn $f(x)$ und $g(x)$ beide $\to 0$ für $x \to x_0$, was passiert dann mit $\frac{f(x)}{g(x)}$?

Antw: $f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{=0} + f'(x_0)(x-x_0) + \mathcal{O}((x-x_0)^2)$

$g(x) = \underbrace{g(x_0)}_{=0} + g'(x_0)(x-x_0) + \mathcal{O}((x-x_0)^2)$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)(x-x_0) + \mathcal{O}((x-x_0)^2)}{g'(x_0)(x-x_0) + \mathcal{O}((x-x_0)^2)} = \frac{f'(x_0) + \mathcal{O}(x-x_0)}{g'(x_0) + \mathcal{O}(x-x_0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{falls } f(x_0) = g(x_0) = 0}$$

„Regel von de l'Hospital"

Beisp: $f(x) = \ln(1+x)$, $g(x) = x$, $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{(\ln(1+x))'}^{\frac{1}{1+x}}}{\underbrace{x'}_{=1}} = 1$$

Somit $\lim_{x \to 0} \underbrace{(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} \to 1} = e^1 = e$ $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$\Rightarrow$ die Folge $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen e.

[direkt: schwierig $\Leftrightarrow$ Mathem. $\hat{=}$ Vermeidung komplizierter Rechnungen!]

~