

$$5.) \quad \underline{b^x \cdot b^y = b^{(x+y)} =: b^{x+y}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} \text{Bew: } b^x \cdot b^y &= \exp(x \ln b) \cdot \exp(y \ln b) = \exp(x \ln b + y \ln b) \\ &= \exp((x+y) \ln b) = b^{(x+y)}. \end{aligned}$$

$$\text{Folgerung: } b^x \cdot b^{-x} = b^0 = 1 \Leftrightarrow \underline{b^{-x} = \frac{1}{b^x}}$$

$$6.) \quad \underline{(b^x)^y = b^{(x \cdot y)} =: b^{x \cdot y}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} \text{Bew: } (b^x)^y &= \exp(y \ln(b^x)) \\ &= \exp(y \cdot \underbrace{x \cdot \ln b}_{\text{siehe 4.)}}) \\ &= \exp(y \cdot x \cdot \ln b) = b^{(x \cdot y)} \end{aligned}$$

$$\left[\text{Aber: im Allg. } b^{(x \cdot y)} \neq (b^x)^y \quad ! \right]$$

↑
"ungleich"

$$7.) \quad \underline{(\exp(x))^y = (e^x)^y = e^{(x \cdot y)} = \underline{\exp(x \cdot y)}} \quad (\text{Gegenstück zu 4.})$$

$$8.) \quad \underline{a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{Bew: } a^x \cdot b^x &= \exp(x \ln a) \exp(x \ln b) = \exp(x \ln a + x \ln b) \\ &= \exp\left(x \underbrace{[\ln a + \ln b]}_{= \ln(a \cdot b)}\right) = \exp(x \cdot \ln(a \cdot b)) = (a \cdot b)^x \end{aligned}$$

• All dies ist für $x = n \in \mathbb{N}$ in Übereinstimmung mit:

$$(i) \quad b^n := \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n \text{ Stück}}, \quad b^{-n} := \frac{1}{b^n} \quad (\text{hier ist aber auch } b \leq 0 \text{ erlaubt!})$$

$$(ii) \quad \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n = b^{\frac{1}{n} \cdot n} = b^1 = b, \text{ d.h. } \underline{\underline{\sqrt[n]{b} := b^{\frac{1}{n}}}} \text{ ist diejenige } \underline{\text{positive}}$$

Zahl, die n -mal mit sich selbst multipliziert b ergibt.

• 5.) + 6.) + 8.) heißen „Potenzgesetze“



Def.: Für ein beliebiges $b \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$ heißt die Fkt.

$$\log_b : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \log_b(x) := \frac{\ln x}{\ln b}$$

der Logarithmus zur Basis b

Speziell :

• ld(x) := $\log_{10}(x)$ (dekadischer Log.)

Andere Namen:

$\log(x)$, $\lg(x)$

• lb(x) := $\log_2(x)$ (binärer Log.)

ld(x)

• ln(x) := $\log_e(x)$ (natürlicher Log.)

$\log_e(x)$

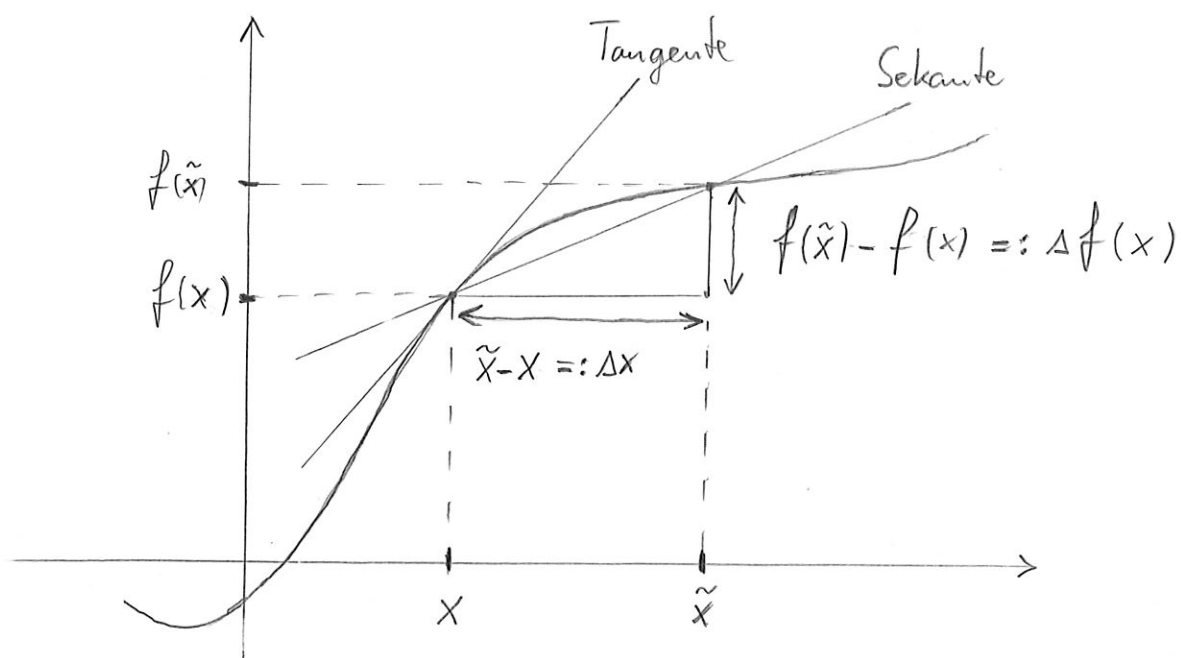
Mehr dazu: Übungen.

8 Differentialrechnung

[Ausführlich in Schule u. Analysis-Vorl. \Rightarrow hier relativ kurz]

8.1 Die Ableitung

Betrachte eine Fkt. f in der Nähe eines „Referenzpunktes“ x :



[x „fest“, \tilde{x} „fließend“]

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} \hat{=} \text{Steigung der Sekante ("Differenzenquotient")}$$

geht für $\tilde{x} \rightarrow x$ bzw $\Delta x \rightarrow 0$ über in

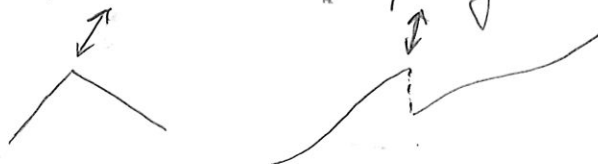
↙ ["df-nach-dx"]

$$\frac{df(x)}{dx} := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \hat{=} \text{Steigung der Tangente ("Differentialquotient")}$$

Voraussetzung: Limes existiert und unabh. davon, ob sich \tilde{x} "von oben" oder "von unten" an x annähert (aber immer $\tilde{x} \neq x$)!

\Leftrightarrow " f ist differenzierbar an der Stelle x ".

$\Leftrightarrow f$ hat bei x keinen "Knick" oder "Sprung".



Name: Ableitung (von f an der Stelle x).

Andere Schreibweisen:

$$\lim_{\tilde{x} \rightarrow x} \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

$\left[\begin{array}{l} \uparrow \text{ analog} \\ \uparrow \text{ von oben oder unten, aber immer } \tilde{x} \neq x \end{array} \right]$

$$= \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \underline{\underline{f'(x)}} \quad \left[\text{"f-Strich"} \right]$$

Präzise Def: Analysis.

Beachte: Falls f auf ganz \mathbb{R} (d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$)

oder einem Teilbereich davon differenzierbar, dann ist

$f'(x)$ selbst wieder eine Fkt. von x .

[Die Ableitung f' ist eine Funktion, die sich aus den Eigenschaften der Fkt.]

erhält.

Wie immer: Auch ganz andere Namen möglich, z.B.:

Fkt.:

Ableitung:

$f(t)$

$$\frac{d}{dt} f(t) =: \dot{f}(t) \quad (f'(t) \text{ unüblich!})$$

\leftarrow „f-Punkt“

$x(t)$ (z.B. „Ort“)

$$\dot{x}(t) =: v(t) \quad (\text{z.B. „Geschw.“})$$

genereller: $\dot{x}(t) \hat{=} \text{Momentangeschw.}$

$$\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \hat{=} \text{mittlere Geschw. [von } t \text{ bis } t+\Delta t]$$

$g(y)$

$$g'(y) = \frac{dg(y)}{dy} = \frac{d}{dy} g(y) \text{ usw.}$$

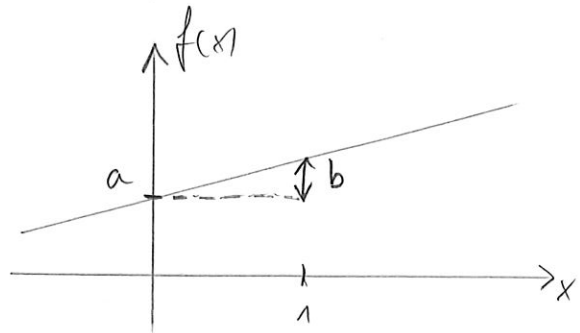
$w(q)$

$w'(q)$

usw.

Beisp:

1.) $f(x) := a + bx$



„Gerade mit Steigung b “. [vgl. Kap. 3.4, S 3.15]

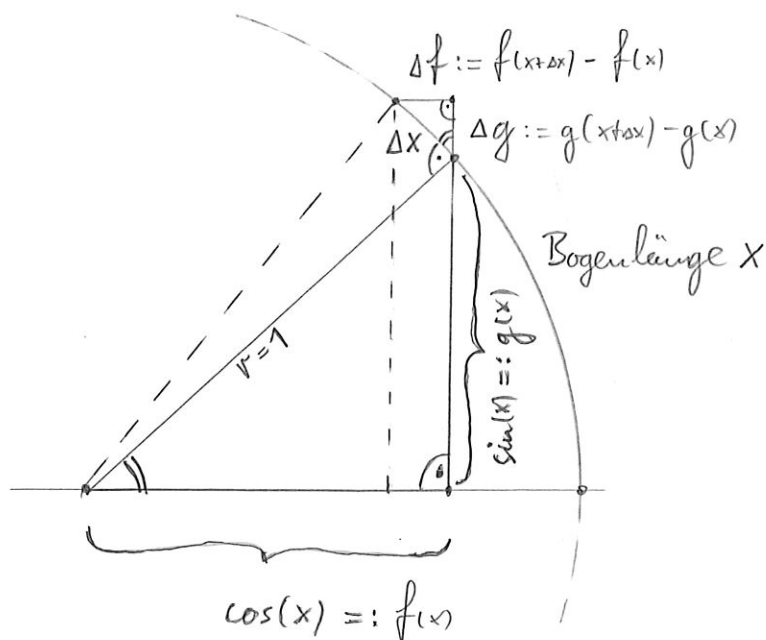
$$\Rightarrow f(\tilde{x}) - f(x) = a + b\tilde{x} - (a + bx) = b(\tilde{x} - x)$$

$$\Rightarrow \lim_{\tilde{x} \rightarrow x} \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} = b \quad ,$$

d.h. $f(x)$ an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ diff'bar und

$$\underline{\underline{f'(x) = b \quad \forall x \in \mathbb{R}}}$$

2.) Betrachte Einheitskreis:



•) Gleicher Winkel Δ im grossen und kl. Dreieck wenn $\Delta x \rightarrow 0$.

•) Für $\Delta x \rightarrow 0$ wird $\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \cos(x)$

•) Beachte: $\Delta f < 0 \Rightarrow \frac{-\Delta f}{\Delta x} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \sin(x)$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \cos(x)$$

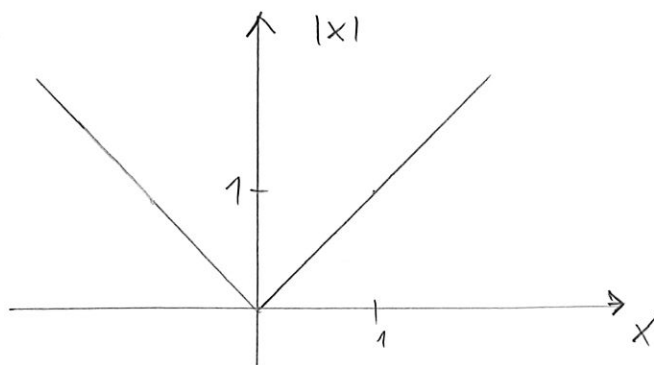
$$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \sin(x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\sin(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cos(x)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\sin'(x) = \cos(x)}}}, \quad \underline{\underline{\cos'(x) = -\sin(x)}}$$

3.) $f(x) := |x|$



$$x > 0 : f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

↑
siehe 1.)

$$x < 0 : f(x) = -x \Rightarrow f'(x) = -1$$

$x = 0$: Keine eindeutige Tangente ("Knick")

$\Leftrightarrow f(x)$ bei $x=0$ nicht diff'bar.

8.2 Ableitungsregeln

Betrachte zwei diff'bare Fkt'en $f(x)$ und $g(x)$.

Dann sind auch die Fkt'en $u(x) := f(x) + g(x)$, $v(x) := f(x) \cdot g(x)$

und $w(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ (falls $g(x) \neq 0$) diff'bar, und es gilt:

$$(i) \quad \underline{u'(x) = (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)} \quad (\text{Summenregel})$$

$$(ii) \quad \underline{v'(x) = (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)} \quad (\text{Produktregel})$$

$$(iii) \quad \underline{w'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}} \quad (\text{Quotientenregel, } g(x) \neq 0)$$

Bew:

Ansatz: $u(x) = f(x) + g(x)$

$$\begin{aligned}
 (i) \quad u'(x) &= \lim_{\tilde{x} \rightarrow x} \frac{u(\tilde{x}) - u(x)}{\tilde{x} - x} = \lim_{\tilde{x} \rightarrow x} \frac{f(\tilde{x}) + g(\tilde{x}) - (f(x) + g(x))}{\tilde{x} - x} \\
 &= \lim_{\tilde{x} \rightarrow x} \left(\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} + \frac{g(\tilde{x}) - g(x)}{\tilde{x} - x} \right) = f'(x) + g'(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad v'(x) &= \lim_{\tilde{x} \rightarrow x} \frac{\overbrace{f(\tilde{x})g(\tilde{x}) - f(x)g(x)}^{=0} + f(x)g(\tilde{x}) - f(x)g(x)}{\tilde{x} - x} \\
 &= \lim_{\tilde{x} \rightarrow x} \left(\underbrace{\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x}}_{\rightarrow f'(x)} \underbrace{g(\tilde{x})}_{\downarrow g(x)} + f(x) \underbrace{\frac{g(\tilde{x}) - g(x)}{\tilde{x} - x}}_{\rightarrow g'(x)} \right)
 \end{aligned}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(iii) Zuerst :

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \lim_{\tilde{x} \rightarrow x} \frac{\frac{1}{g(\tilde{x})} - \frac{1}{g(x)}}{\tilde{x} - x} = \frac{g(x) - g(\tilde{x})}{g(\tilde{x})g(x)}$$

$$= \lim_{\tilde{x} \rightarrow x} \underbrace{\frac{1}{g(\tilde{x})g(x)}}_{\rightarrow \frac{1}{(g(x))^2}} \left(\underbrace{-\frac{g(\tilde{x}) - g(x)}{\tilde{x} - x}}_{\rightarrow -g'(x)} \right) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\text{Jetzt: } \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)\right)' \stackrel{\uparrow}{=} \text{(ii)}$$

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \underbrace{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}_{= -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$