Grundlegende Eigenschaft

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)} \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$$

Bew: Entweder direkt: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$: nicht ganz einfach, hier weggelassen. Oder „indirekt": viel einfacher $\to$ Kap. 8.3

Folgerungen:

- $\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(0) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \exp(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

- $\underset{\uparrow \in \mathbb{N}}{\exp(n)} = \exp(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ Stück}}) = \underbrace{\exp(1)}_{=e} \cdot \underbrace{\exp(1)}_{=e} \cdots \exp(1)$ ...

$$\exp(n) = e^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \quad \Rightarrow \quad \exp(-n) = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$$

- Für $x \geq 0$ offensichtlich: $\underline{\underline{\exp(x) > 0}}$

  Für $x < 0$ folgt dasselbe aus $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

- $e^n = \exp(n) = \exp\left(\frac{n}{2} + \frac{n}{2}\right) = \exp\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2$

  $\Rightarrow \exp\left(\frac{n}{2}\right) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{siehe oben}}}{(\pm)} \sqrt{e^n} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$, z.B. $\underline{\underline{\exp\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} = 1{,}64\ldots}}$

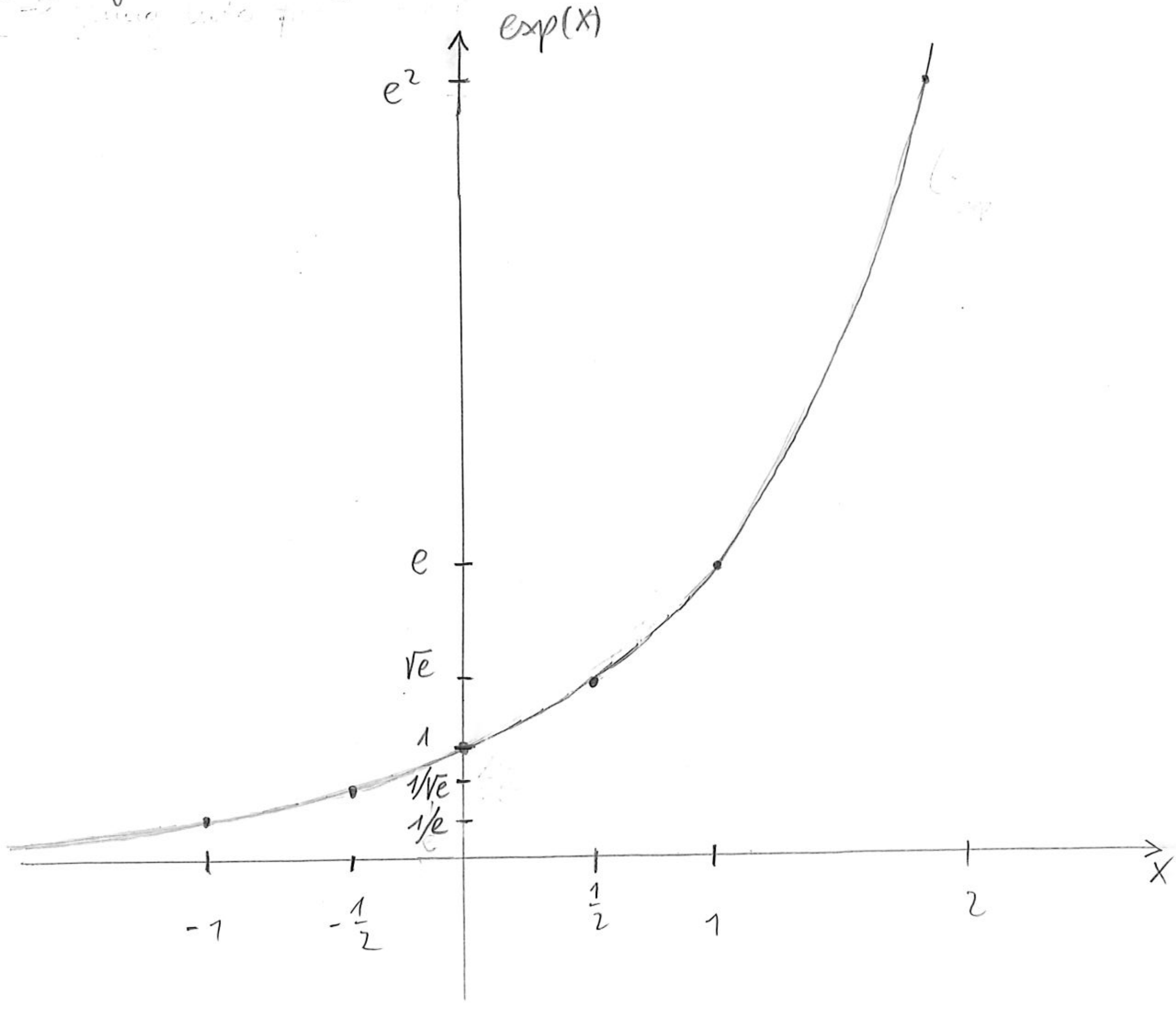
- Analog: $\exp\left(\frac{n}{m}\right) = \sqrt[m]{e^n} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}$

[• Später werden wir zeigen: $\exp(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (Kap. 7)
[jetzt: e^x noch gar nicht definiert!]]

• Für $x \geq 0$ offensichtlich: mit zunehmendem x nimmt auch x^k zu, und somit auch $\exp(x)$.

Für $x \leq 0$ folgt dasselbe aus $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

[⇒ genug Info für Skizze]

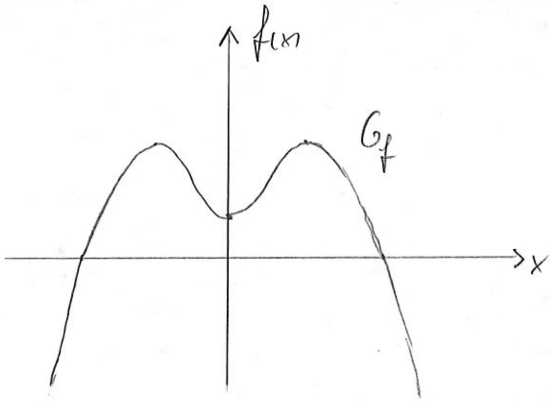


6 Funktionen (Teil 2)

6.1 Symmetrien

1.) f heisst **gerade** Fkt. $\Leftrightarrow$ $\underline{f(-x) = f(x)}$ $\forall x$

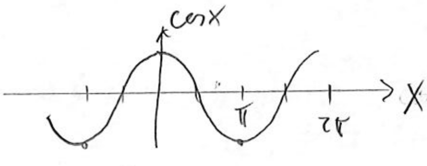
Beisp: a)



[könnte z.B. Polynom 4. Ordn. sein]

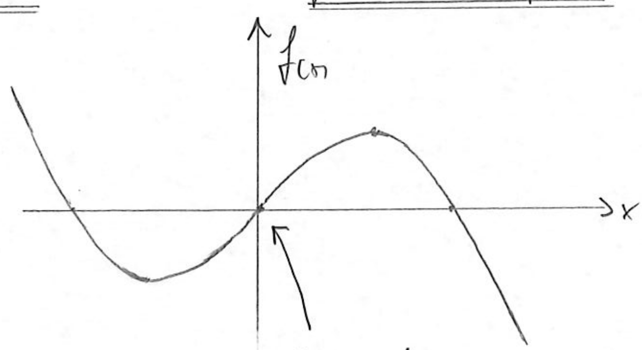
Symmetrie- bzw Spiegelgerade

b) $f(x) = \cos(x)$



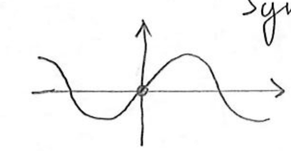
2.) f heisst **ungerade** Fkt. $\Leftrightarrow$ $\underline{f(-x) = -f(x)}$ $\forall x$

Beisp.: a)



Symmetrie- bzw Spiegelungspkt.

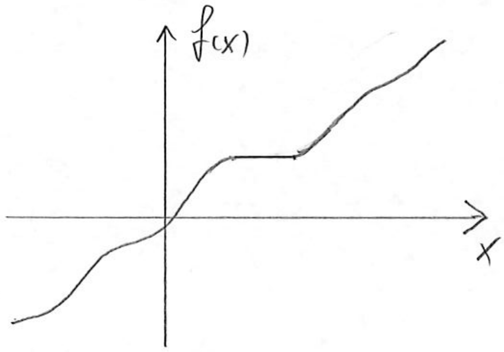
b) $\sin(x)$



Weitere Beisp: Ü.

6.2 Monotonie

f heisst monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $f(x_1) \leq f(x_2) \quad \forall\, x_1 < x_2$



und streng monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $f(x_1) < f(x_2) \quad \forall\, x_1 < x_2$

Wichtigstes Beisp: $\exp(x)$.

Analog: (streng) monoton fallend.

Beisp.: Ü.

6.3 Umkehrfunktionen

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (oder fallend)
$\hookrightarrow$ „Definitionsbereich"

$\forall x \in A \Rightarrow$ falls $x_1 \neq x_2$ dann $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Def: $f(A) := \{ f(x) \mid x \in A \}$ „Wertebereich von f".

$\Rightarrow$ zu jedem $y \in f(A)$ „gehört" genau ein [$\hat{=}$ ein und nur ein] $x \in A$,

nämlich das x mit $f(x) = y$.

$\Leftrightarrow$ Zuordnung von x zu $f(x) = y$ ein-eindeutig,

d.h. umkehrbar:

Umkehrfkt. $f^{-1} : f(A) \to A$

$y \mapsto f^{-1}(y) =:$ dasjenige $x \in A$ mit $f(x) = y$

$\Leftrightarrow$ „Auflösen der Gl. $f(x) = y$ nach x" $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(y) = x$

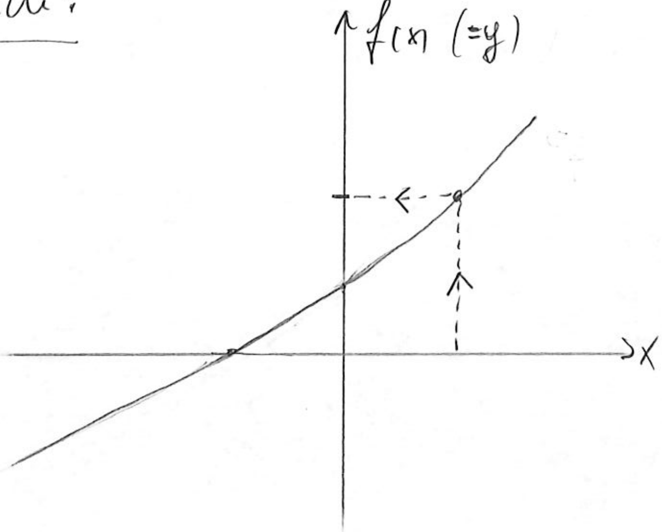
$$\Rightarrow \quad \underbrace{f^{-1}\big(\underbrace{f(x)}_{y}\big)}_{f^{-1}(y) = x} = x \qquad \forall x \in A$$

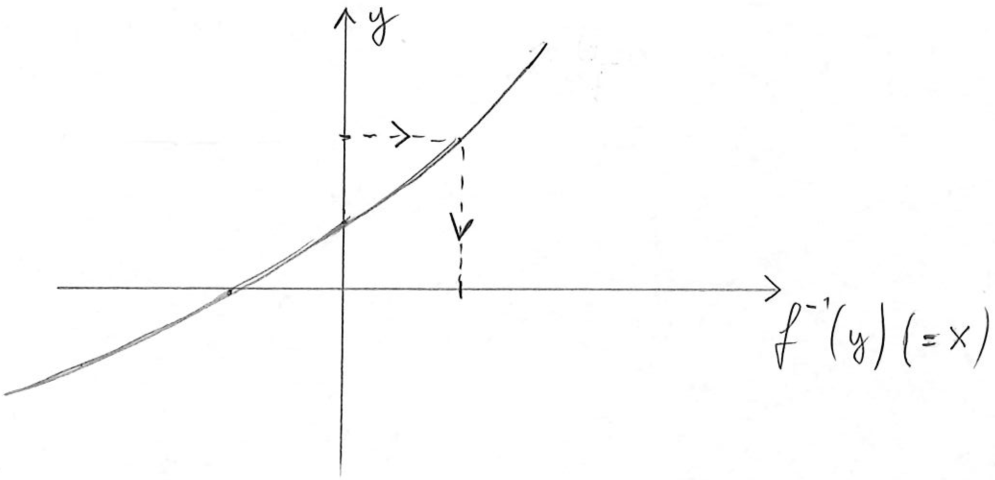
Ebenso: $$\underbrace{f\big(\underbrace{f^{-1}(y)}_{x}\big)}_{f(x) = y} = y \qquad \forall y \in f(A)$$

$$\Leftrightarrow \quad f\big(f^{-1}(x)\big) = x \qquad \forall x \in f(A)$$

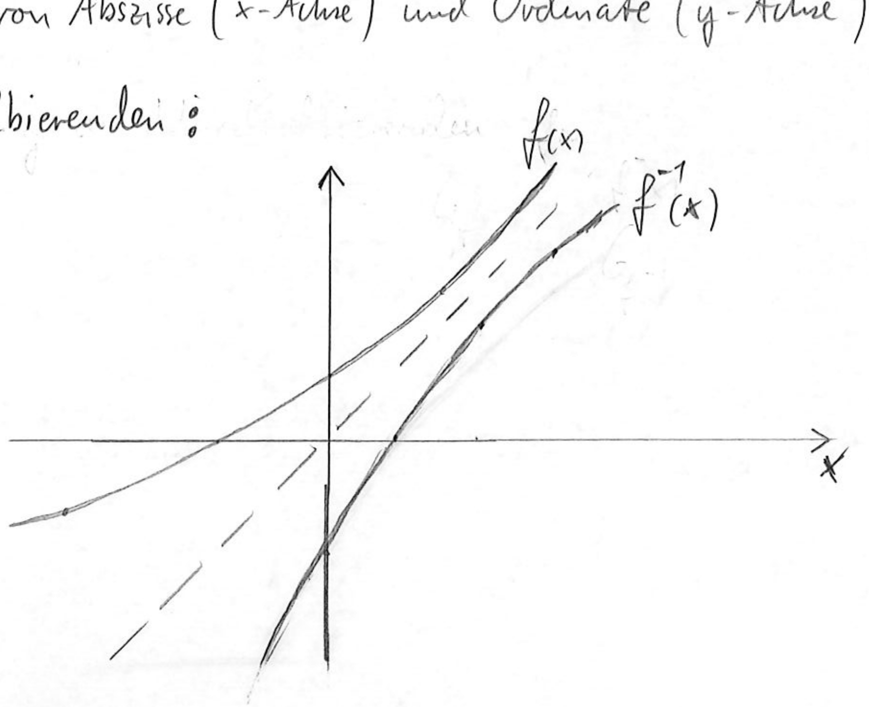
[der Name des Arguments ändert nichts an den Eigenschaften der Fkt. !]

Anschaulich:





Vertauschen von Abszisse (x-Achse) und Ordinate (y-Achse) $\Leftrightarrow$ Spiegelung an Winkelhalbierenden:



$\Rightarrow$ $f^{-1}(x)$ wieder streng monoton wachsend (oder fallend).

<u>Beisp:</u>

„Auflösen nach x"

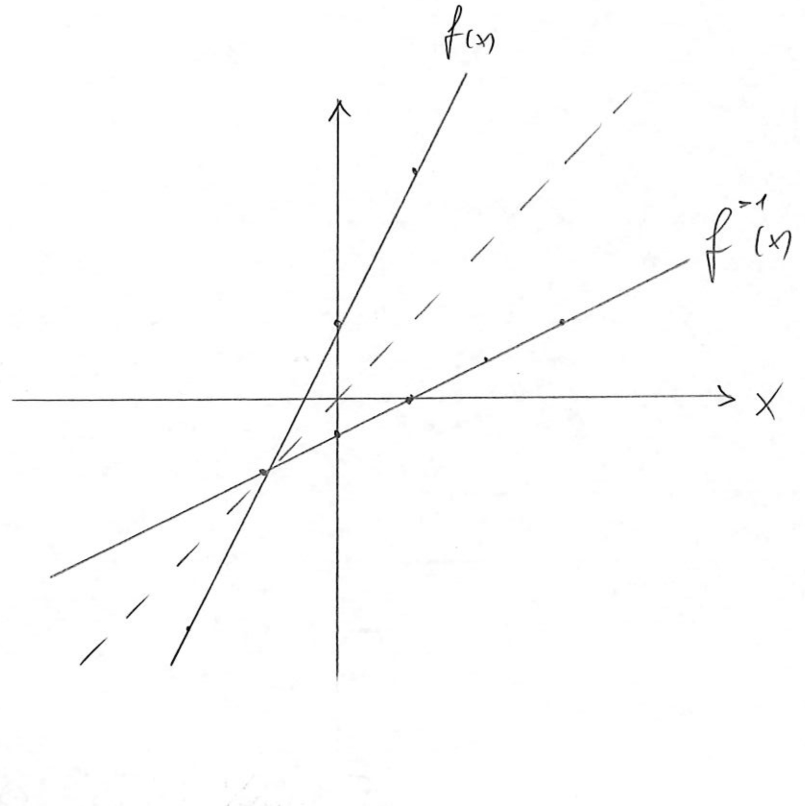
1.) $\underline{\underline{f(x) := 1 + 2x}} = y \Leftrightarrow 2x = y - 1$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y = f^{-1}(y) \Leftrightarrow \underline{\underline{f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x}}$

Probe: $f(f^{-1}(x)) = f\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right) = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right) = 1 - 1 + x = x$ ✓

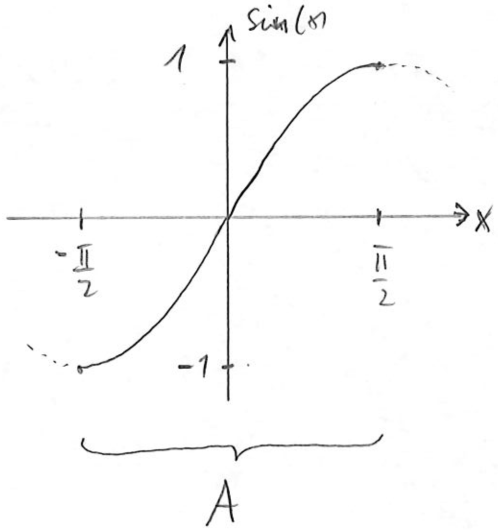
$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(1 + 2x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + 2x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + x = x$ ✓

Skizze:



2.) $f: \underbrace{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}_{A} \to \underbrace{[-1,1]}_{f(A)}$

$$x \mapsto f(x) := \sin(x)$$



[Bem: man muss sin(x) geeignet einschränken, z.B. auf $A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

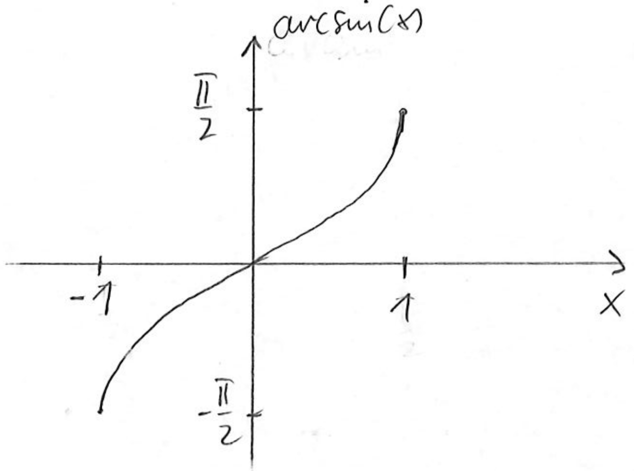
sonst nicht streng monoton $\Rightarrow$ nicht umkehrbar

(z.B. $A = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ ginge auch, aber unüblich).]

Def: $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$x \mapsto \underline{\underline{\arcsin(x) := \sin^{-1}(x)}}$$

„Arcus-Sinus".



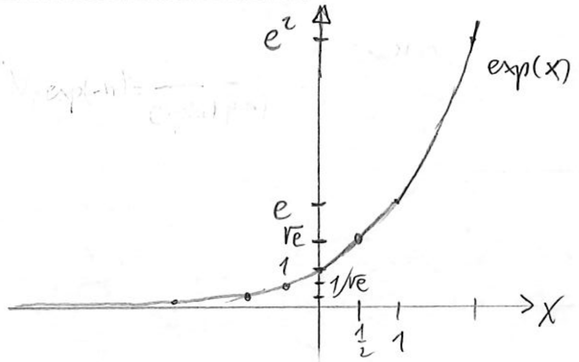
Weitere Beisp.: Ü

Wichtigstes Beisp: Kap. 7

7 Logarithmus und Potenzen

Erinnerung:

x	$\exp(x)$
0	1
1	$e \approx 2{,}71\ldots$
2	e^2
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{e} \approx 1{,}64\ldots$
-1	$1/e$
-2	$1/e^2$
$-1/2$	$1/\sqrt{e}$



$\Rightarrow$ $\exp(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und streng monoton wachsend mit

$f(A) = \exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow$ Umkehrfkt $\exp^{-1}(x)$ existiert und wird „ln" genannt:

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \underline{\underline{\ln(x) := \exp^{-1}(x)}}$$ „logarithmus naturalis"

$\uparrow$

oder $\ln x$

Folgerungen:

- $\ln(\exp(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $\exp(\ln(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

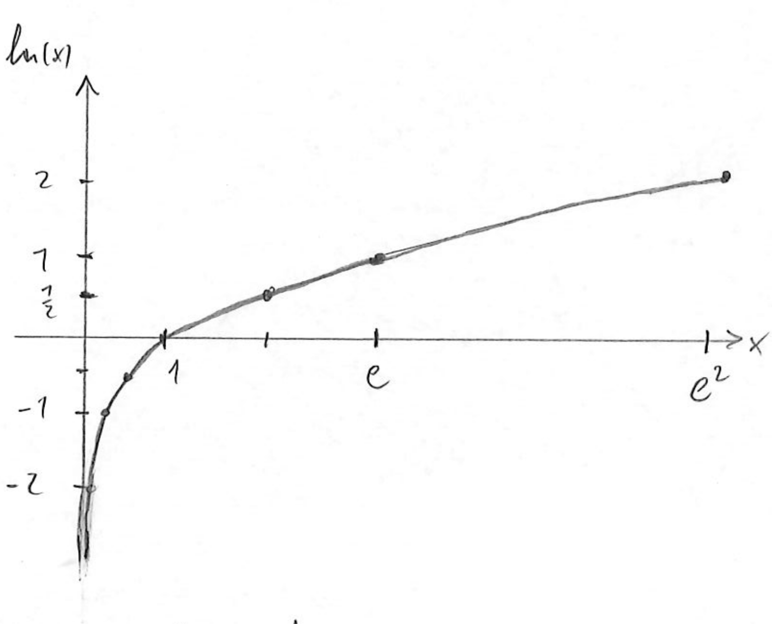
- $\boxed{\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$ [„Grundeigenschaft"] $\updownarrow$

Bew.: $\ln(x \cdot y) = \ln\Big(\overbrace{\exp(\underbrace{\ln x}_{=:a})}^{x} \cdot \overbrace{\exp(\underbrace{\ln y}_{=:b})}^{y}\Big)$ $\Big|$ $\exp(a) \cdot \exp(b) = \exp(a+b)$

$$= \ln\big(\exp(\ln x + \ln y)\big) = \ln x + \ln y$$

- Graph:

x	$\ln(x)$
1	0
e	1
e^2	2
$\sqrt{e}$	$1/2$
$1/e$	-1
$1/e^2$	-2
$1/\sqrt{e}$	$-1/2$



Nochmals: $\ln(1) = 0$; $\ln(x)$ für $x \leq 0$ existiert nicht.

<u>Def:</u> Sei $b \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann heisst

$$\underline{\underline{b^x := \exp(x \cdot \ln b)}}$$

die x-te <u>Potenz</u> von b (b: Basis , x: Exponent)

<u>Folgerungen:</u>

1.) $\underline{\underline{b^0}} = \exp(0) = \underline{\underline{1}} \quad \forall\, b \in \mathbb{R}^+$

in Übereinstimmung mit früherer Def. $x^0 := 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

2.) $\underline{\underline{b^1}} = \exp(\ln b) = \underline{\underline{b}}$ (wie gewohnt)

3.) $e^x = \exp(x \underbrace{\ln e}_{=1}) \Rightarrow \boxed{\exp(x) = e^x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

4.) $\boxed{\ln(x^y) = y \ln x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}$

Bew.: $\ln(\underbrace{x^y}_{\exp(y \ln x)}) = \ln(\exp(y \ln x)) = y \ln x$