5. Folgen und Reihen

5.1 Folgen

Eine Folge ist eine unendl. lange Auflistung von

Folgegliedern $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Beisp:

1.) $a_1 := \frac{1}{2}$, $a_2 := \frac{2}{3}$, $a_3 := \frac{3}{4}$, ...

hoffentlich klar!

$\Leftrightarrow \quad a_n := \frac{n}{n+1}$

2.) $b_1 := -1$, $b_2 := 1$, $b_3 := -1$, ...

$\Leftrightarrow \quad b_n = ?$ [PÜ] $= (-1)^n$

3.) $q_1 := 1 \,, \quad q_2 := 2 \,, \quad q_3 := 3 \,, \quad \ldots$

$$\Leftrightarrow \quad q_n = \,? \quad [\text{PÜ}] \quad = n$$

4.) $a_n := r a_{n-1} = r r a_{n-2} = r^n a_0$ (r & a_0 „gegeben") $\Leftrightarrow a_{n+1} = r a_n$ (rekursive Def.)

Eine Folge heisst konvergent, wenn alle hinreichend „späten" Folgeglieder a_n beliebig nahe bei einem sog. Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ verbleiben.

- Sprechweise: a_n konvergiert gegen a.

- Schreibweisen: $a_n \to a$ für $n \to \infty$,

  $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$,

  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

- Veranschaulichung:

- Mathem. präzise: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 so, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$. (Für uns hier „zu kompliziert".)

Beisp. von vorhin:

1.) $a_n := \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

Anschaulich klar: $\frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$.
[naiv/für Physiker]

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \quad (=a)$

2.) $b_n := (-1)^n$: es gibt keinen Grenzwert, d.h.

die Folge ist divergent.

3.) $q_n := n$: wieder divergent, aber hier ist ∞ eine

Art „Ersatzgrenzwert" oder „uneigentlicher Grenzwert":

$q_n \to \infty$ für $n \to \infty$

4.) Falls $|r| < 1$ anschaulich klar: [naiv / für Physiker]

$r^n = \underbrace{r \cdot r \cdots r}_{n \text{ Stück}}$ wird mit zunehmendem n immer

kleiner, d.h. $r^n \to 0$ für $n \to \infty$.

$\Rightarrow \quad a_n = r^n a_0 \to 0$ für $n \to \infty$.

[Falls $|r| \geq 1$: selbst!]

5.2 Reihen

Addiert man die Glieder einer Folge, erhält man eine Reihe:

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

(nur beginnt man jetzt meist mit 0 statt 1).

Dabei kann man die s_n selber auch wieder als eine Folge betrachten: sog. „Partialsummenfolge".

Folgerung: $$s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k}_{s_n} + a_{n+1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad s_{n+1} := s_n + a_{n+1}$$ (rekursive Definition)

Beisp:

1.) $a_k := r^k a_0 \Leftrightarrow a_{k+1} := r\, a_k$ (Erinnerung: $x^0 := 1$, $x^1 := x \quad \forall x \in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow \quad s_n = a_0 (1 + r + r^2 + \ldots + r^n) = a_0 \sum_{k=0}^{n} r^k$$

$\Leftrightarrow$ „geom. Reihe" aus Kap. 2.2 $\Rightarrow$

$$s_n = a_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad \text{falls } r \neq 1$$

$$s_n = a_0 (n+1) \quad \text{falls } r = 1$$

2.) $a_0 := 0$, $a_k := \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{s_n}_{n \geq 1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$ (sog. harmonische Reihe)

$a_0 = 0$ weggelassen!

Wenn die Partialsummenfolge konvergiert [„zum Stehen kommt"],

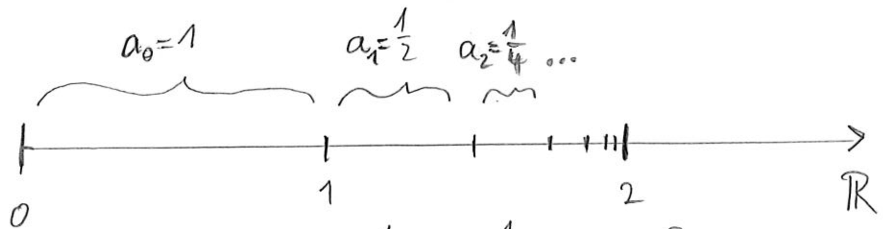
dann bezeichnet das Symbol $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ den Grenzwert der

Reihe [„unendliche Summe"], andernfalls ist das Symbol $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$

<u>nicht</u> definiert [„macht keinen Sinn"].

Beisp. 1.) : $a_k := r^k a_0 \iff a_{k+1} = r\, a_k$

a) Anschaulich für $r = \frac{1}{2}$, $a_0 = 1$:



$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2$$

Obwohl immer mehr Summanden, kommt Summe „zum stehen"!

b) $|r| < 1$, $a_0 = 1$:

$$\Rightarrow S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{r}{1-r} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{r^n} \longrightarrow \frac{1}{1-r} \quad \text{für } n \to \infty$$

$$\iff \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \quad \text{für } |r| < 1}}$$

[c) $|r| \geq 1$: selbst!]

Beisp. 2.) : $a_0 := 0,\ a_k := \frac{1}{k}\ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \quad (n \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{\geq \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \geq s_2 + \frac{1}{2} = 2$$

$$s_8 = s_4 + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} \geq 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

usw.

$\Rightarrow$ harmonische Reihe divergiert!

~

Frage: Welche Bedingungen an a_k reichen aus, um Konvergenz von s_n zu garantieren?

(Sog. „Konvergenzkriterien").

Bem:

- $a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ reicht offenbar nicht aus, siehe Beisp. 2).
- Bedingungen sollen hinreichend sein, nicht unbedingt notwendig!

Beh: Falls $r := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ kleiner als 1, dann

konvergiert die Reihe (sog. „Quotientenkriterium")

Strenger Bew.: Analysis Vorl.

(ebenso: weitere Konvergenzkriterien).

„Nicht-strenge" Begründung: [„für Physiker"]

1.) $r \geq 0 \Rightarrow |r| = r$

2. Für grosse k ist $|a_{k+1}| = r\,|a_k|$ in sehr guter Approx,

d.h. selbe Situation wie für geom. Reihe $\Rightarrow$ konvergent

falls $r = |r| < 1$.

5.3 Potenzreihen

Potenzreihen sind Funktionen der speziellen Form

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

Bem:

- Die $c_k \in \mathbb{R}$ sind „fest", x ist „variabel" ($\hat{=}$ „unendliches Polynom")
- Für jedes „gegebene" x ist also $f(x)$ „ganz normale Reihe"

  mit $a_k := c_k x^k$,
- Nur für solche x definiert, für die Reihe konvergent.

- Hinreichende Bedingung:

$$r := \lim_{k\to\infty} \underbrace{\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}_{\left|\frac{c_{k+1}\,x^{k+1}}{c_k\,x^k}\right| = \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\cdot x\right| = \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|\cdot|x|} < 1 \qquad \text{(Quotientenkrit.)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad |x| < \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| \qquad \text{(Quotientenkrit.)}$$

5.4 Die Exponentialfunktion

<u>Def.:</u> $n! := 1 \cdot 2 \cdots n$ für $n \in \mathbb{N}$ („n Fakultät")

$0! := 1$

Beisp.: $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$,

$5! = 120$, ..., $10! = 3'628'800$, ...

wächst extrem schnell!

Betrachte Potenzreihe mit $c_k := \frac{1}{k!}$

$\Rightarrow \quad \frac{c_k}{c_{k+1}} = \frac{(k+1)!}{k!} = k+1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| = \infty$

$\Rightarrow$ Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Def:

$$\boxed{\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$$

Exponentialfkt.

- Wichtigste Fkt. in Physik und Mathematik!
- Konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Nochmals: $0! := 1$, $x^0 := 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\exp(0) = \frac{1}{1} + \frac{0^1}{1} + \frac{0^2}{2!} + \ldots \quad = 1$

$$\exp(0) = 1$$

- $\exp(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \ldots$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}}_{2,5} + \frac{1}{6}}_{=2,\overline{6}} + \frac{1}{24}}_{2,708\overline{3}} + \frac{1}{120}}_{2,71\overline{6}} + \frac{1}{720}}_{2,7180\overline{5}}$$

[genau das macht auch der Taschenrechner!]

$$e := \exp(1) = 2,7182818\ldots \quad \text{Eulersche Zahl}$$

- Man kann beweisen : $e \notin \mathbb{Q}$ (siehe K. Hefft, Kap. 3.5).

[$\Rightarrow$ wenn man nur den Zahlenbereich $\mathbb{Q}$ benutzen würde,

dann würde $\exp(x)$ (sowie viele andere Reihen) für viele

x nicht mehr existieren! (Da $\exp(x) \notin \mathbb{Q}$.)

Dies ist ein Hauptgrund, nicht $\mathbb{Q}$ sondern $\mathbb{R}$ zu verwenden!]

~