Betrachte $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ .

$\Rightarrow \quad |\vec{u}|, |\vec{v}| \neq 0$

Def : $\quad \lambda := \frac{1}{|\vec{u}|^2} (\vec{u} \cdot \vec{v})$

$\vec{v}_\parallel := \lambda \vec{u}$

$\vec{v}_\perp := \vec{v} - \vec{v}_\parallel \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$

$$\Rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v}_\parallel = \lambda \, \vec{u} \cdot \vec{u} = \frac{1}{|\vec{u}|^2} (\vec{u} \cdot \vec{v}) \underbrace{\vec{u}^2}_{|\vec{u}|^2} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v}_\perp = \vec{u} (\vec{v} - \vec{v}_\parallel) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}_\parallel}_{\vec{u} \cdot \vec{v}} = 0$$

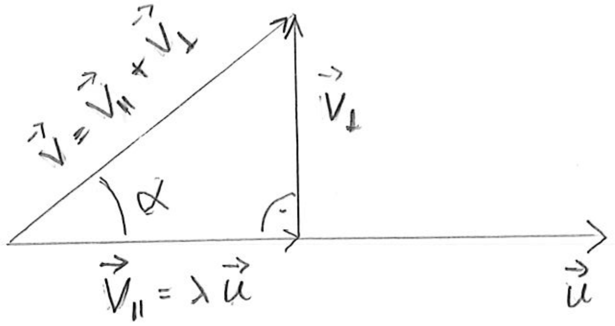
$$\vec{v}_\parallel \cdot \vec{v}_\perp = \lambda \, \vec{u} \cdot \vec{v}_\perp = 0$$

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp|^2 = (\vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp) \cdot (\vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp) = \vec{v}_\parallel^{\,2} + \underbrace{\vec{v}_\parallel \cdot \vec{v}_\perp}_{=0} + \underbrace{\vec{v}_\perp \cdot \vec{v}_\parallel}_{=0} + \vec{v}_\perp^{\,2}$$

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_\parallel|^2 + |\vec{v}_\perp|^2 \qquad \text{(Pythagoras)}$$

[3 Seiten legen Dreieck fest!]

$\Rightarrow$ $\vec{v}_{\parallel}$ und $\vec{v}_{\perp}$ senkrecht/rechtwinklig zueinander



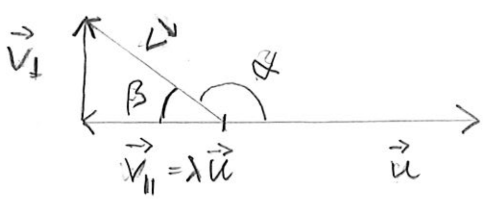

(für $n \geq 3$ ist dies die durch $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannte Ebene)

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{|\vec{v}_{\parallel}|}{|\vec{v}|} \Rightarrow |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos(\alpha) = |\vec{u}|\,\underbrace{|\vec{v}_{\parallel}|}_{|\lambda \vec{u}| = |\lambda|\,|\vec{u}|}$$

$$= |\lambda|\,|\vec{u}|^2 = \underbrace{\frac{1}{|\vec{u}|^2}\,|\vec{u}\cdot\vec{v}|}_{|\lambda|}\,|\vec{u}|^2 = |\vec{u}\cdot\vec{v}|$$

In obiger Skizze: $\lambda \geq 0 \xRightarrow{\text{Def. von } \lambda} \vec{u}\cdot\vec{v} \geq 0 \Rightarrow |\vec{u}\cdot\vec{v}| = \vec{u}\cdot\vec{v}$

Falls $\lambda < 0$:




$\Rightarrow |\vec{u}\cdot\vec{v}| = -\vec{u}\cdot\vec{v}$

$$\cos(\beta) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$


$$\measuredangle(\vec{u},\vec{v}) := \text{Zwischenwinkel von } \vec{u} \text{ und } \vec{v} = \begin{cases} \alpha & \text{falls } \lambda \geq 0 \\ \beta & \text{falls } \lambda < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\left(\measuredangle(\vec{u},\vec{v})\right)$$

Folgerungen:



1.) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$ („senkrecht" oder „orthogonal").

2.) Mit $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik}$ folgt: alle $\vec{e}_k$ sind normiert und paarweise orthogonal $\Rightarrow$ $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ heisst eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.

3.) Oben:

$$\lambda := \frac{1}{|\vec{u}|^2}\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

? $\vec{v}_\parallel := \lambda\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\cdot\vec{u}$ d.h. $\vec{v}_\parallel$ ist parallel zu $\vec{u}$

$\vec{v}_\perp := \vec{v} - \vec{v}_\parallel$ und $\vec{v}_\perp \cdot \vec{u} = 0$ d.h. $\vec{v}_\perp$ ist senkrecht zu $\vec{u}$

$\Downarrow$

$V = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$ d.h. ein bel. Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ kann so „zerlegt" werden in einen Beitrag senkrecht zu $\vec{u}$ und einen parallel zu $\vec{u}$!

4.) $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \big|\,|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}))\,\big| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\overbrace{|\cos(\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}))|}^{\leq 1} \leq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

(Cauchy-Schwarz Ungl.)

5.) $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) =$

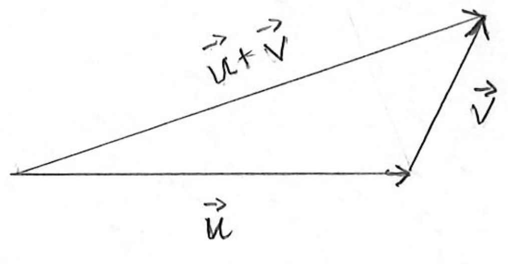
$= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\,\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 + \underbrace{2\,\vec{u}\cdot\vec{v}}_{\leq 2|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq 2|\vec{u}||\vec{v}|} + |\vec{v}|^2 =$

4.)

$\leq |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}| + |\vec{v}|^2 = (|\vec{u}| + |\vec{v}|)^2$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|}}$ (Dreiecksungl.)

Veranschaulichung:




$|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u}+\vec{v}|$ ✓

## (III) Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt)

Ist Besonderheit des $\mathbb{R}^3$. Symbol „x".

Def: $$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Alternative Schreibweise: $\vec{u} \wedge \vec{v}$

PÜ: berechne $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = ? \qquad = \begin{pmatrix} 0-(-4) \\ -2-3 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es folgt:

(a) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

(b) $(\lambda \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \lambda \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$

(c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w} \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

(d) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$

Merkhilfe: „bac − cab"

(Konvention: $\vec{v} \cdot \lambda := \lambda \cdot \vec{v}$)

(e) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \quad \forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

(sog. <u>Spatprodukt</u>)

Bew: Übungen

Weitere Folgerungen:

1.) $\vec{v} \times \vec{v} \underset{\substack{\uparrow \\ (a)}}{=} -\vec{v} \times \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}}} \quad \forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

2.) $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \underset{\substack{\uparrow \\ (e)}}{=} \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{u}) \underset{\substack{\uparrow \\ 1.)}}{=} \vec{v} \cdot \vec{0} = 0$

genauso: $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\vec{u} \times \vec{v} \text{ ist orthogonal zu } \vec{u} \text{ und zu } \vec{v}}} \quad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

3.) $$(\vec{u}\times\vec{v})^2 = \underbrace{(\vec{u}\times\vec{v})}_{=:\vec{w}}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) \overset{(e)}{=} \vec{v}\cdot\underbrace{(\vec{w}\times\vec{u})}_{*} =$$

[Nebenrechnung]

$$* \overset{(a)}{=} -\vec{u}\times\vec{w} = -\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{v}) \overset{(d)}{=} -\left(\vec{u}\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v}) - \vec{v}\cdot(\vec{u}\cdot\vec{u})\right)$$

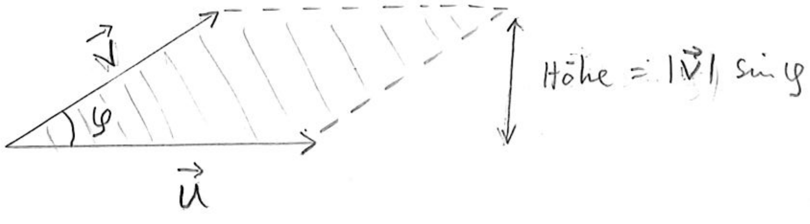
$$= -\underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{u})(\vec{u}\cdot\vec{v})} + |\vec{v}|^2|\vec{u}|^2$$

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = \left(|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\varphi)\right)^2 \qquad \varphi := \sphericalangle(\vec{u},\vec{v})$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\underbrace{\left(1-\cos^2(\varphi)\right)}_{\sin^2(\varphi)}$$

Da $\varphi\in[0,\pi]$ folgt $\sin\varphi \geq 0 \quad \Rightarrow$

$$\underline{\underline{|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin(\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}))}}$$

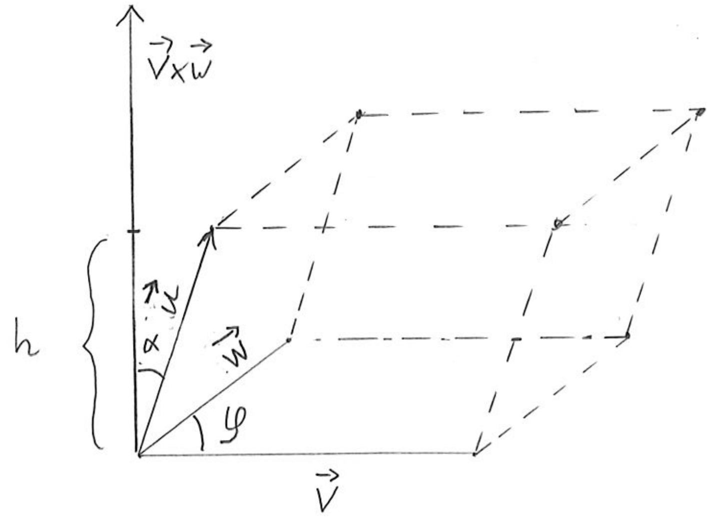



$\Rightarrow$ $\underline{\underline{|\vec{u}\times\vec{v}| \mathrel{\hat{=}} \text{Fläche des von } \vec{u} \text{ und } \vec{v} \text{ aufgespannten Parallelogramms}}}$

4.) $\underline{\underline{\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \overset{3.)}{\Leftrightarrow} \vec{u} \text{ und } \vec{v} \text{ kollinear}}}$ $(\text{d.h. } \vec{u} = c \cdot \vec{v})$

$\underline{\underline{\text{oder } \vec{u} = \vec{0} \quad \text{oder } \vec{v} = \vec{0}}}$

5.)




$\varphi = \sphericalangle(\vec{v}, \vec{w})$

$\alpha = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w})$

$h = |\vec{u}| \cos(\alpha)$

$$\underbrace{\underline{\underline{|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|}}}_{\text{„Spatprodukt"}} = |\vec{u}|\ |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot \cos(\alpha) = \underset{\text{Höhe}}{h} \cdot \underbrace{|\vec{v} \times \vec{w}|}_{\text{Grundfläche}} =$$

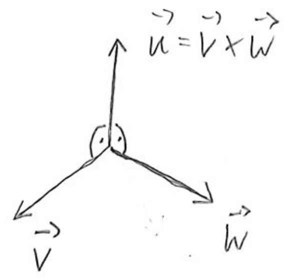
$\underline{\underline{= \text{Volumen des von } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ aufgespannten Spats bzw. Parallelepipeds}}}$

6.) Sei $\vec{u} := \vec{v} \times \vec{w} \neq \vec{0}$. Wir wissen:

- $\vec{u}$ ist senkrecht zu $\vec{v}$ und $\vec{w}$.
- Länge $|\vec{u}| = |\vec{v}|\,|\vec{w}| \sin(\measuredangle(\vec{v}, \vec{w}))$.

$\Rightarrow$ es bleiben nur noch 2 Möglichkeiten („Orientierungen") für $\vec{u}$:

a)

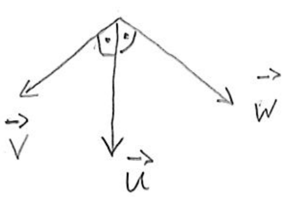



„Rechte-Hand-Regel"

d.h. die 3 Vektoren $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u} := \vec{v} \times \vec{w}$

bilden ein sog. „Rechtssystem"

b)



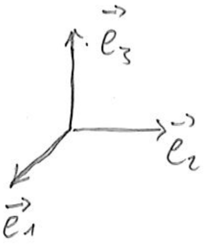

„Linkssystem".

Beh.: a) trifft zu

Bew.:

Wähle zunächst $\vec{v} = \vec{e_1}$, $\vec{w} = \vec{e_2}$ $\Rightarrow$

$$\vec{u} = \vec{e_1} \times \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \vec{e_3}$$




Rechtssystem

[nur sagen]

Verändere jetzt Länge und Richtung von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ kontinuierlich, bis gewünschte Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ erreicht sind, und gleichzeitig so, dass $|\vec{v}|\,|\vec{w}|\,\sin(\measuredangle(\vec{v}, \vec{w}))$ niemals 0 wird (das geht!).

Damit ändert sich auch $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$ kontinuierlich, kann also niemals plötzlich „umklappen" oder $\vec{0}$ werden $\Rightarrow$

Rechtssystem bleibt erhalten.

q.e.d.