4 Vektoren

[Hat viele verschiedene Aspekte $\Rightarrow$ in mehrere Kap. aufgeteilt.]

Def.: $\mathbb{R}^3 := \{ (v_1, v_2, v_3) \mid v_{1,2,3} \in \mathbb{R} \}$

$\hat{=}$ Menge aller Zahlentripel („Vektoren").

Elemente aus $\mathbb{R}^3$ werden durch „Vektorpfeile" gekennzeichnet, z.B. $\vec{v}, \vec{u}, \vec{x}$ usw. D.h. jedes $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ ist von der Form $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Alternative Schreibweise:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

(sog. Zeilen- bzw. Spaltenvektoren).

Wieder ist $\mathbb{R}^3$ mehr als nur eine Menge, nämlich:

(I) Man kann Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren nach folgenden Regeln:

Betrachte zwei bel. $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Def:</u> $$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{pmatrix}$$ („komponentenweise")

$$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix}$$ („skalare/äussere Multipl.")

mit oder ohne Pkt. egal!

$\Rightarrow$ „übliche Rechenregeln", z.B.

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \qquad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

$$\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v} \qquad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(x+y)\,\vec{v} = x\vec{v} + y\vec{v} \qquad \forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^3,\ x, y \in \mathbb{R}$$

usw.

[selber verifizieren!]

Weitere Defs.: $\vec{v} \cdot \lambda := \lambda \vec{v}$

$$-\vec{v} := (-1) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(inverser Vektor)}$$

$$\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(Nullvektor)}$$

$$\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-\vec{v})$$

Folgerung: $\vec{v} - \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \forall \, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

Die Menge $\mathbb{R}^3$ mit dieser „Zusatzausstattung" heisst ein Vektorraum.

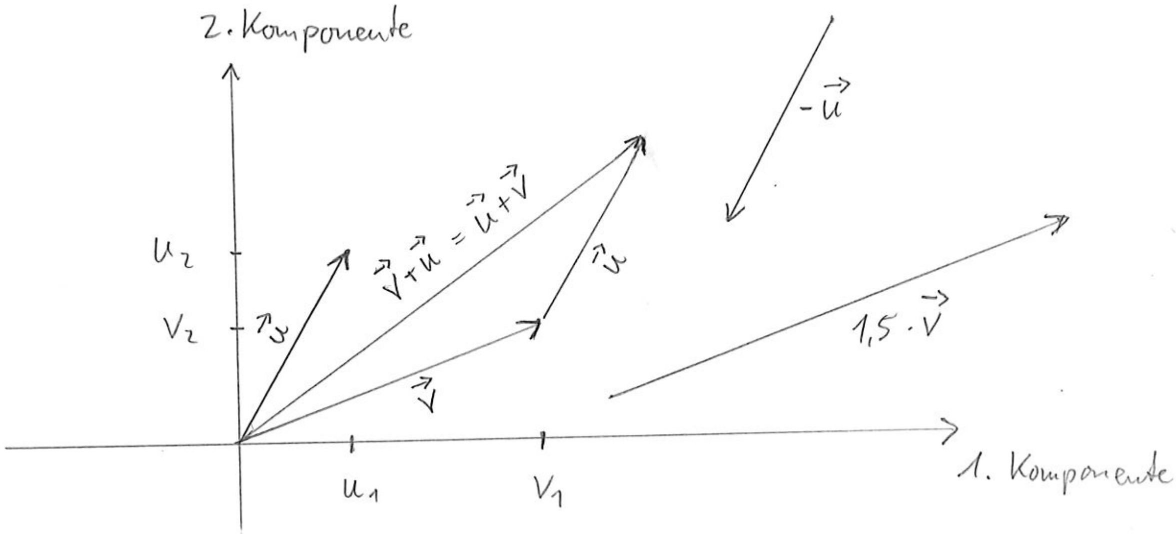
Analog: • Vektorraum $\mathbb{R}^2$ (alles mit 2 statt 3 Komponenten).

• <u>Vektorraum $\mathbb{R}^n$</u> (—"— n —"—).

z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. PÜ: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -1/5 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 0 \\ -1/15 \\ \pi/3 \end{pmatrix}$

n heisst die <u>Dimension</u> von $\mathbb{R}^n$.

„<u>Veranschaulichung</u>" für $n=2$: Vektor $\hat{=}$ „Pfeil in der Ebene"



$\Rightarrow$ $\vec{v}$ hat bestimmte „<u>Richtung</u>" und „<u>Länge</u>", ist aber „<u>verschiebbar</u>"!

Für $n=3$: „Pfeil im Raum" [; für $n=1$: „auf Geraden";]

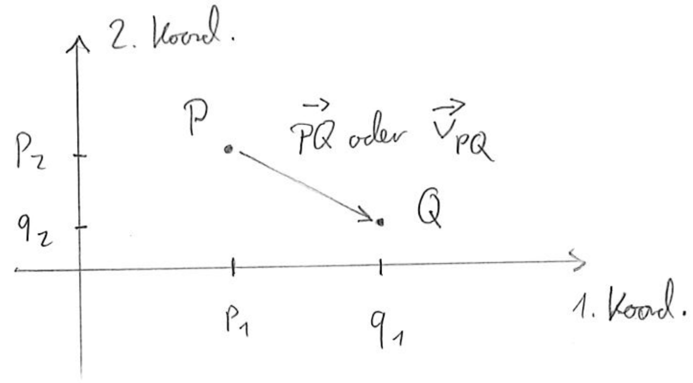
für $n \geq 4$ <u>keine</u> „Veranschaulichung"!

Beisp. für $\mathbb{R}^4$: $v_{1,2,3} \hat{=}$ Ort, $v_4 \hat{=}$ Zeit ; für $\mathbb{R}^6$: $v_{4,5,6} \hat{=}$ Geschw. usw
[Relativitätstheorie] [klass. Mechanik]

Betrachte 2 „Raumpunkte" $P = \underbrace{(p_1 | p_2 | \dots | p_n)}_{\text{„Kartesische Koordinaten"}}$ und

$Q(q_1 | q_2 | \dots | q_n)$

Veranschaulichung für $n=2$:



$\Rightarrow$ „Verbindungsvektor"

$$\underline{\vec{PQ} = \vec{v}_{PQ} := \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}}$$

(„Endpkt. minus Anfangspkt.")

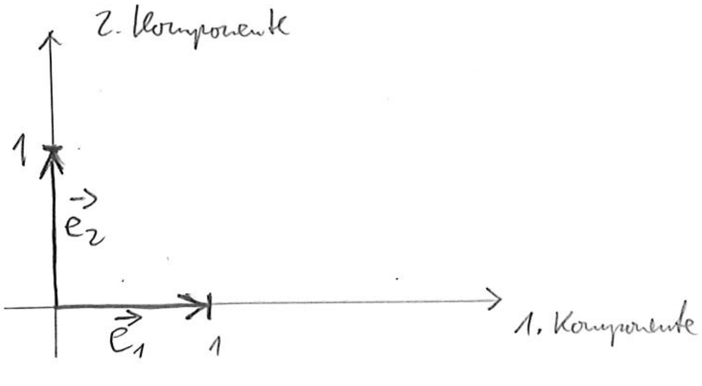
[beschreibt „Verschiebung"]

Insbes. ist $\vec{OP} = \vec{v}_{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ („<u>Ortsvektor</u>") [beschreibt „Ort"]

mit $O := (0 | 0 | \dots | 0)$ („Ursprung" oder „Koordinatenursprung")

Def.: $\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_k := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k, \dots, \vec{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Veranschaulichung für $n=2$:

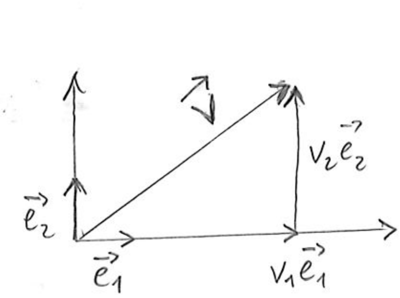


$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_n \end{pmatrix}.$$

$$= v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + \dots + v_n \vec{e}_n$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} v_1 \vec{e}_1}} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$



d.h. jedes $\vec{v}$ mittels $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ „darstellbar" / „zerlegbar"

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \text{ heisst eine Basis von } \mathbb{R}^n}}$

~

Alternative Schreibweise z.B. für $n=3$: (vgl. EP I):

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ oder $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ...

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ statt $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

$\Rightarrow \quad \vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$,

analog für $n=2$.

Bem.: Vektoren in der Physik: z.B. Ort, aber auch Geschw., Kraft, ...

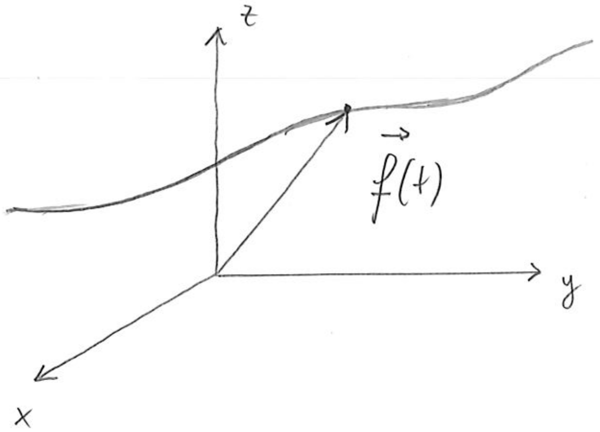
Vektorwertige Fkt'en:

$\vec{f} : A \to \mathbb{R}^n$, A : ganz $\mathbb{R}$ oder ein Teil davon.

$$t \mapsto \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)\, \vec{e}_k$$

d.h. je eine „ganz normale Fkt." für jede Komponente!

Veranschaulichung im $\mathbb{R}^3$:



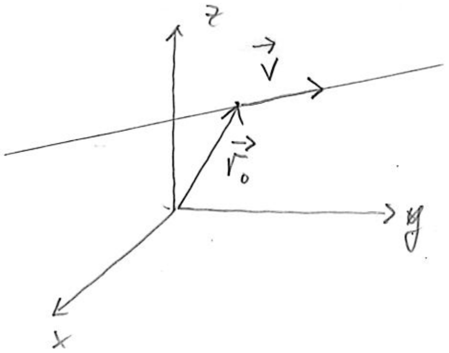
z.B. Ortsvektor eines Massepunktes als Fkt. der Zeit

$\hat{=}$ „Weg / Kurve / Bahn / Pfad ..."

Beisp:

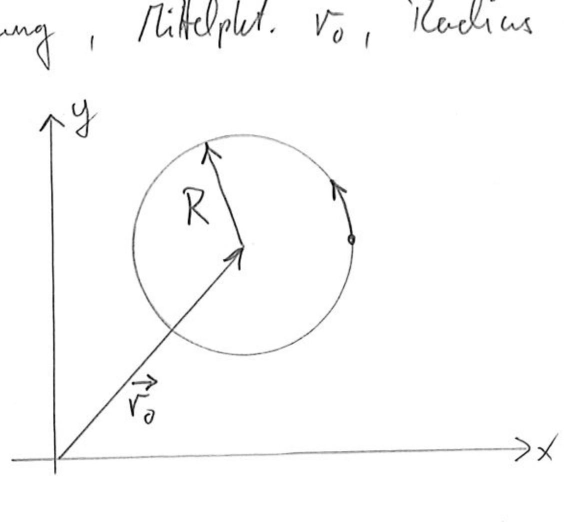
1.) $\vec{f}(t) := \vec{r}_0 + t \cdot \vec{v}$

$\hat{=}$ Bewegung mit konst. Geschw. $\vec{v}$ und „Anfangsbed." $\vec{f}(0) = \vec{r}_0$



2.) Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{f}(t) := \vec{r}_0 + R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$

$\hat{=}$ Kreisbewegung, Mittelpkt. $\vec{r}_0$, Radius R, Winkelgeschw. ω



„einmal rum" wenn $\omega t = 2\pi \Leftrightarrow t = 2\pi/\omega$

(II) Man kann Vektoren miteinander multiplizieren nach folgender Regel:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$

sog. Skalarprodukt oder inneres Produkt.

PÜ: $n=4$, berechne $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = ?$ $= 0+3-1+0 = 2$

Es folgt:

(1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} \quad \forall\, \vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

(2) $\vec{v}\cdot\vec{v} > 0$ falls $\vec{v} \neq \vec{0}$ und $\vec{v}\cdot\vec{v} = 0$ falls $\vec{v} = \vec{0}$.

(3) $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v}) \quad \forall\, \vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$

(4) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w} \quad \forall\, \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^n$

Bew: Übungen

Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dieser „Zusatzausstattung" heisst

ein **Hilbertraum**.

Betrachte wieder $\vec{e}_k := \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow k$, $k \in \{1,\dots,n\}$

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_k \cdot \vec{e}_k = 0^2 + \dots + 0^2 + \underset{\substack{\uparrow\\ k}}{1^2} + 0^2 + \dots + 0^2 = 1$$

Falls $i \neq k$ dann $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = 0\cdot 0 + \dots + 0\cdot 0 + \underset{\substack{\uparrow\\ i}}{1\cdot 0} + 0\cdot 0 + \dots + 0\cdot 0 + \underset{\substack{\uparrow\\ k}}{0\cdot 1} + \dots + 0\cdot 0 = 0$

Def: $\delta_{ik} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ („**Kronecker**-Symbol")

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik} \quad \forall\ i,k \in \{1,\dots,n\}$$

Def: $$\underline{\underline{|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2}}}$$

sog. „Betrag" oder „Länge" oder „Norm" von $\vec{v}$.

Alternative Schreibweise: $\|\vec{v}\|$ oder v.

Ein Vektor $\vec{v}$ heisst normiert oder Einheitsvektor $\Leftrightarrow$ $|\vec{v}| = 1$

Folgerungen:

a) $$|\vec{v}|^2 = \sum_{k=1}^{n} v_k^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} =: \vec{v}^{\,2} \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}^{\,2}}$$

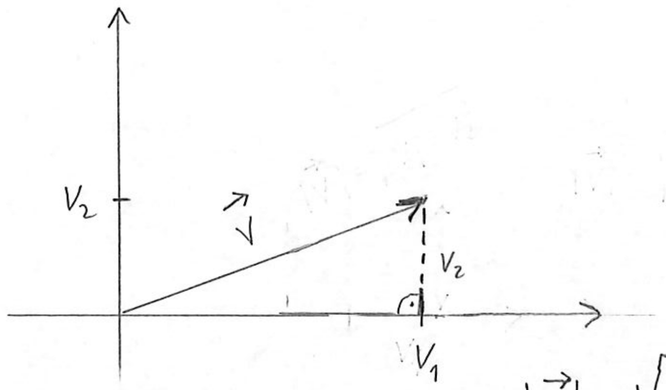
Beisp: $$|\vec{e}_k| = \sqrt{\underbrace{\vec{e}_k \cdot \vec{e}_k}_{\delta_{kk}=1}} = 1$$

b) $$|\vec{v}| \overset{(2)}{>} 0 \text{ falls } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ und } |\vec{v}| \overset{(2)}{=} 0 \text{ falls } \vec{v} = \vec{0}$$

c) $$|\lambda \vec{v}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \underbrace{(\lambda v_k)^2}_{\lambda^2 v_k^2}} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} v_k^2} = \underbrace{\sqrt{\lambda^2}}_{|\lambda|} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2} = |\lambda| \cdot |\vec{v}|$$

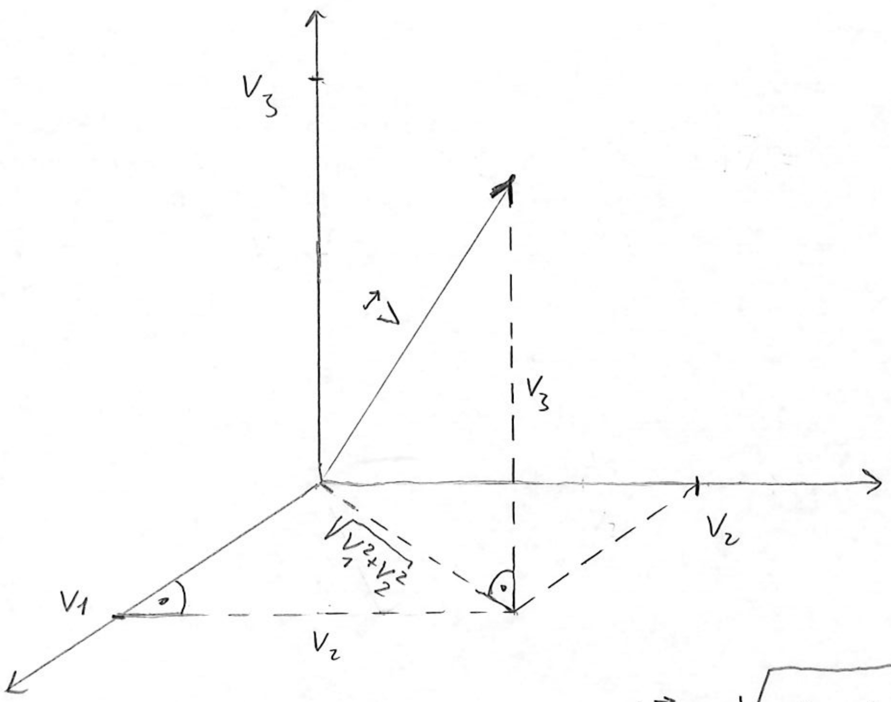
Veranschaulichung:

n = 2:



$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$ ✓

n = 3:



$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$ ✓