

2.2 Das Summensymbol.

Betrachte n reelle Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n ($n \in \mathbb{N}$).

Def. :
$$\underline{a_1 + a_2 + \dots + a_n =: \sum_{k=1}^n a_k} \quad (\text{Summensymbol})$$

↑
"Definition"
↑
"k läuft von 1 bis n"

Analog :
$$\underline{a_m + a_{m+1} + \dots + a_n =: \sum_{k=m}^n a_k} \quad (m \leq n)$$

Präsenzübung :

• $a_3 = 2, a_4 = -1, a_5 = 0, a_6 = 0,6 \Rightarrow \sum_{k=3}^6 a_k = ? = 2 - 1 + 0,6 = 1,6$

• $b_m = m^2 \Rightarrow \sum_{m=1}^4 b_m = ? = \sum_{m=1}^4 m^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

• $x_l = \frac{1}{l} \Rightarrow \sum_{i=3}^5 x_i = ? = \sum_{i=3}^5 \frac{1}{i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \dots = \frac{47}{60}$

↙ "Bemerkung(en)"
Bem.:

• Für $m=n$: $\sum_{k=m}^n a_k = a_n$

• Für $m > n$: $\sum_{k=m}^n a_k = 0$ (leere Summe)

• Trivial, aber oft verwirrend:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=m}^n a_j = \sum_{v_0=m}^n a_{v_0} = \dots$$

(Bezeichnung des Summationsindex spielt für Wert der Summe keine Rolle!)

Insbes. sog. Indexverschiebung:

Beisp: $\sum_{m=1}^4 m^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \sum_{m=0}^3 (m+1)^2$

Allg.: $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=m+l}^{n+l} a_{j-l}$ für bel. $l \in \mathbb{Z}$

↑ "Allgemein" ↑ "beliebig"

↑ "Substitution" $j := k+l$
 $\Leftrightarrow k = j-l$

Wichtigstes Beisp.:

Beachte $a_k := x^k = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{k \text{ Stück}} \quad (x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})$

Def.: $S_n := \sum_{k=0}^n a_k = \underbrace{x^0}_{=1} + \underbrace{x^1}_{=x} + x^2 + \dots + x^n$

Präsenzüb: Verifiziere $xS_n - S_n = x^{n+1} - 1$

Lösung:
$$\begin{aligned} &= x(1+x+x^2+\dots+x^n) - (1+x+x^2+\dots+x^n) \\ &= \underbrace{x+x^2+x^3+\dots+x^{n+1}}_{\text{usw, nur } x^{n+1} \text{ und } 1} - 1 - x - x^2 - \dots - x^n \quad (\text{Teleskopsumme}) \\ &= x^{n+1} - 1 \quad \text{"ohne Partner"} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x-1)S_n = x^{n+1} - 1 \quad \Rightarrow S_n = \frac{x^{n+1} - 1}{x-1} \quad (\text{falls } x \neq 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x-1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}} \quad \begin{array}{l} (\text{sog. geometrische Reihe}) \\ (x \neq 1) \end{array}$$

Bem: für $x=1$ ist $S_n = n+1$

3. Funktionen

Eine Funktion ist eine Vorschrift, die jeder Zahl

x ("Argument der Fkt.") eine Zahl $f(x)$ ("Funktionswert")

zuordnet. [Vervollg.: später!]

Schreibweise: $f: A \rightarrow B$
 $x \mapsto f(x)$

$A \hat{=}$ Menge aller möglicher x -Werte (meist \mathbb{R} oder ein Teil davon),

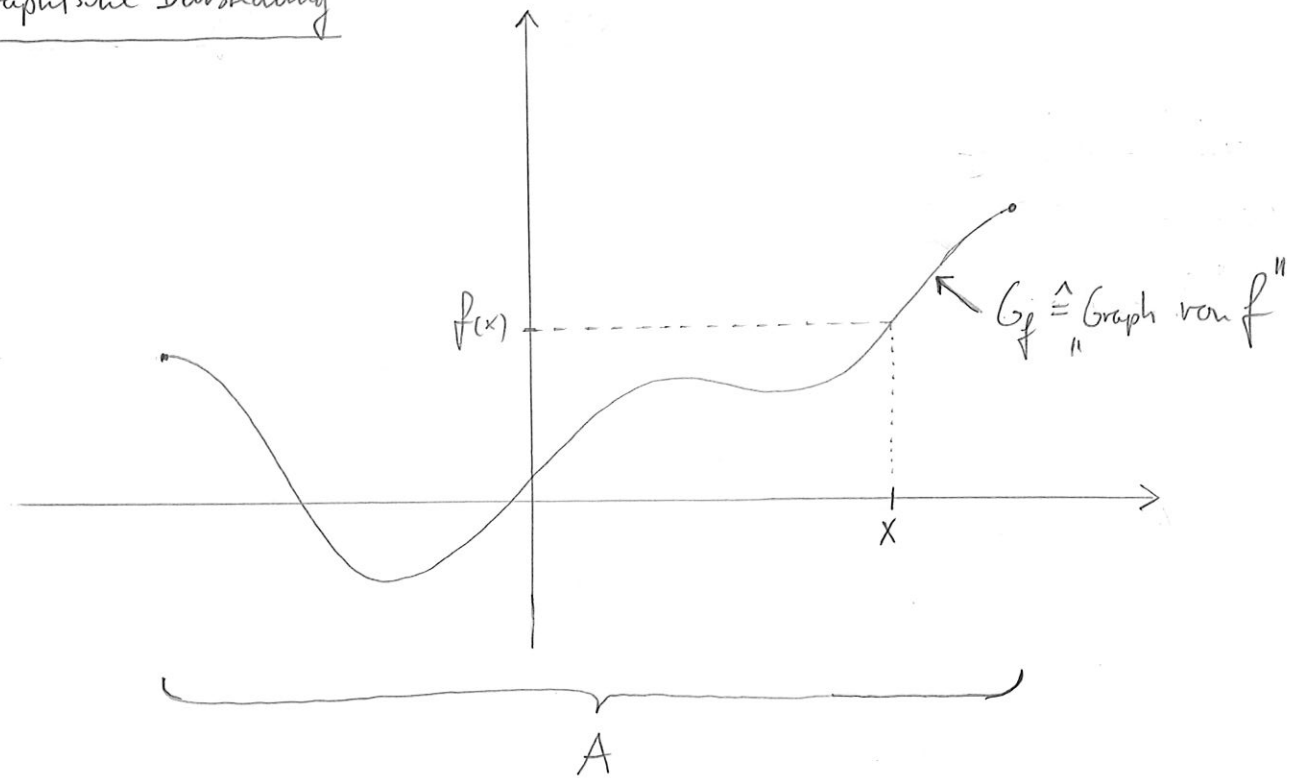
seq. Definitionsbereich (von f).

B muss (mindestens) alle möglichen $f(x)$ -Werte enthalten \Rightarrow meist $B = \mathbb{R}$.

Kurzschreibweisen: $f: A \rightarrow B$ oder $f(x)$ oder f .

Statt " f " und " x " auch bel. andere Symbole: $g(x)$, $f(y)$, $h(z)$, $w(q)$, $\Lambda(\beta)$,
 $x(f), \dots$

Graphische Darstellung



Graph von f auf A ? („nur“ der Teil $f|_A$)

Off kann man nur einen Teil von G_f zeichnen, z.B. wenn $A = \mathbb{R}$.

\Rightarrow den „interessantesten“ Bereich muss man selber finden!

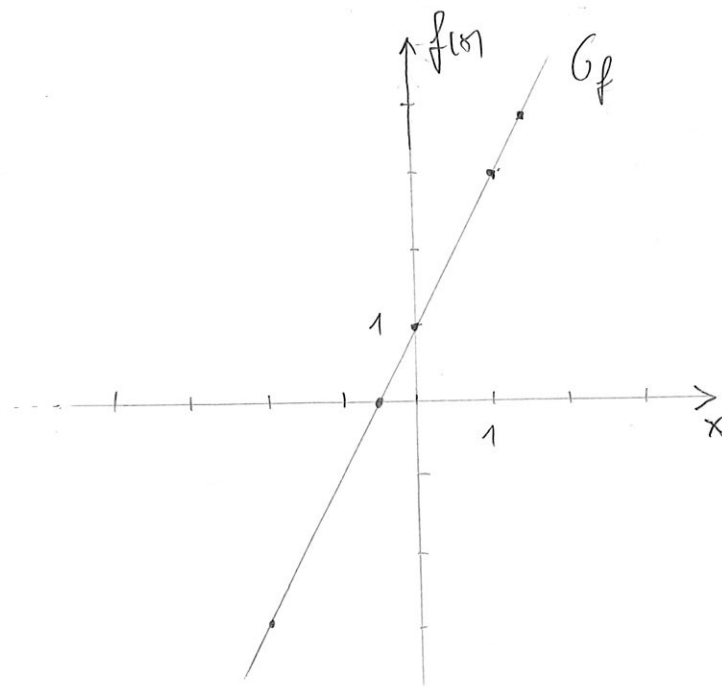
Beisp:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := 1 + 2x.$$

Kurz: $f(x) := 1 + 2x$

Wertetabelle:

x	f(x)
0	1
1	3
1,5	4
-0,5	0
-2	-3



(man muss so viele x-Werte nehmen, bis das Aussehen von G_f „klar“ ist)

[viele weitere Beisp: später!]

Ganz allg. gilt: [siehe Beisp. S. 3.2]

• Lösungen der Gl. $f(x) = 0 \Leftrightarrow$ Nullstellen (NS) von G_f

• Lösungen der Ungl. $f(x) > 0 \Leftrightarrow$ "wo liegt G_f über x -Achse?"

↑

"algebraisches Problem"

↑

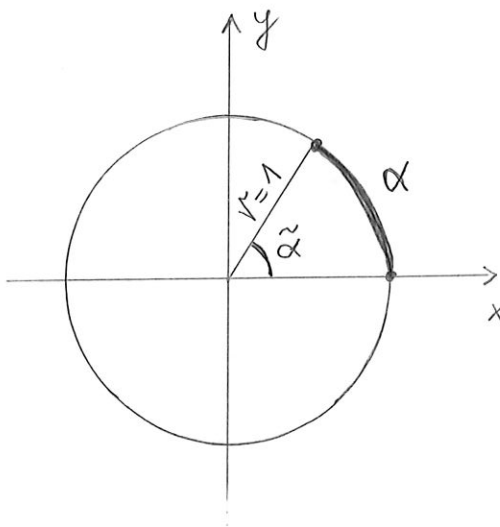
"geometrische Lösung"

↑

Näherungslösung: "Ausprobieren" vieler x -Werte,
z.B. per Computer.

3.1 Trigonometrische Funktionen

Betrachte „Einheitskreis“:



$\tilde{\alpha} \hat{=} \text{Winkel im Gradmass}$

$\alpha \hat{=} \text{Winkel im Bogenmass} := \text{Länge des Kreisbogens (Radius } r=1)$

Voller Kreis : $\tilde{\alpha} = 360^\circ \stackrel{\leftarrow \text{„entspricht“}}{\hat{=}} \alpha = 2\pi$

Halbkreis : $\tilde{\alpha} = 180^\circ \hat{=} \alpha = \pi$

Rechter Winkel: $\tilde{\alpha} = 90^\circ \hat{=} \alpha = \pi/2$

usw

\Rightarrow Umrechnung

$$\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \tilde{\alpha}$$

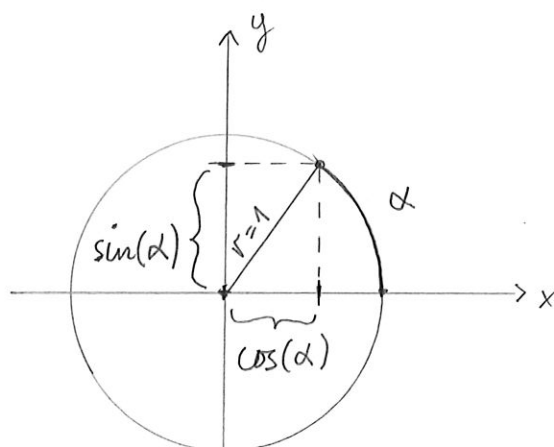
PÜ: Welchem Gradmass $\tilde{\alpha}$ entspricht das Bogenmass $\alpha = 1$?

$$\tilde{\alpha} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha = \frac{180^\circ}{3,14\dots} \cdot 1 \approx 57,3^\circ$$

Ab jetzt benutzen wir Bogenmass, zeichnen aber so \triangle^{α} !

Taschenrechner benutzen oft Gradmass!

Geometrische Def. von Sinus und Cosinus im Einheitskreis:



[Definition!]

Abk.: $\sin \alpha := \sin(\alpha)$, $\cos \alpha := \cos(\alpha)$

⇒ Spezielle Werte:

$$\sin(0) = 0, \quad \cos(0) = 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

↗ 90°

$$\sin(\pi) = 0, \quad \cos(\pi) = -1$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1, \quad \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$$

$$\sin(2\pi) = 0, \quad \cos(2\pi) = 1$$

⇒ Ganz allg für jedes α :

• $\sin(2\pi + \alpha) = \sin(\alpha)$, $\cos(2\pi + \alpha) = \cos(\alpha)$

(„ 2π -periodische Fkt'en“, $\alpha \in \mathbb{R}$ bel.)

• $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos \alpha$, $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\alpha)$

⇒ $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$

• $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

• $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ (Pythagoras)

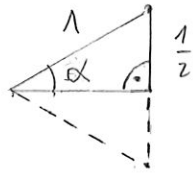
↑
 $=: [\sin(\alpha)]^2$

⇒ für $\alpha = \frac{\pi}{4} \hat{=} 45^\circ$:  $\sin(\alpha) = \cos(\alpha)$

⇒ $2 \sin^2(\alpha) = 1$ ⇒ $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 ↑ $\approx 0,71\dots$

analog für $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $\pi + \frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4}$, ...

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \stackrel{!}{=} 30^\circ$$



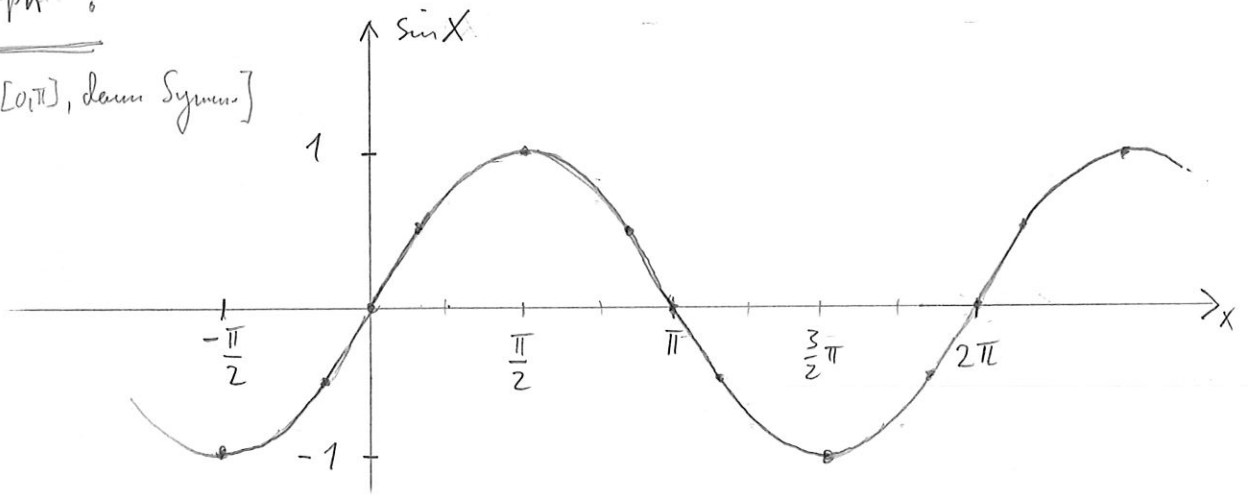
[alle Winkel $60^\circ!$]

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}}} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$$

analog: $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ usw.

Graph:

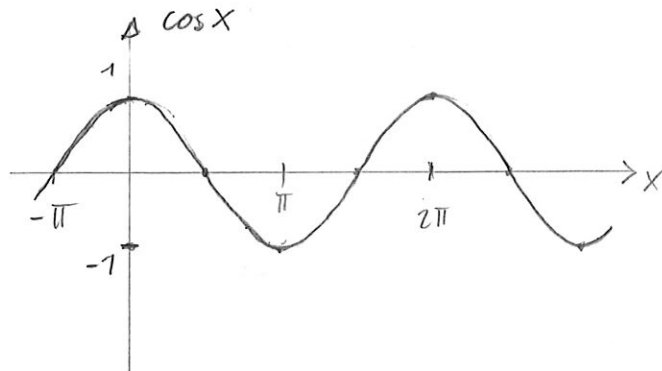
[erst $[0, \pi]$, dann Symmetrie]

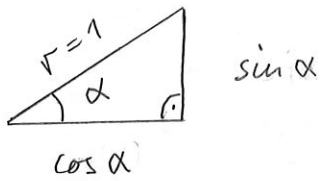


[Vorstellung: Kreisender Plot.]

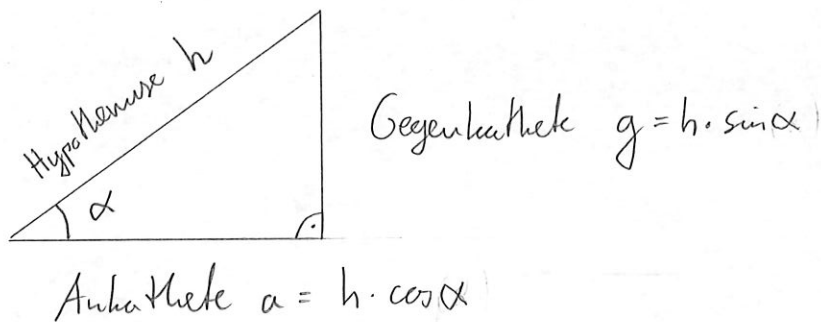
(so kann man $\sin(x)$ ohne zu rechnen "schätzen")

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$





multipliziere alles mit bel. Faktor $h \in \mathbb{R}^+$:



$$\Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad (\text{Tangens})$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$