Vorkurs (SoSe 2024)

P. Reimann

Organisatorisches → www.physik.uni-bielefeld.de/~reimann/VK24.html

Wichtigstes Ziel: Sie selber sollen aktiv werden! Nicht nur „konsumieren".

⇒ ∘ Vorlesungs-Mitschrift (Papier schlägt Bildschirm).

∘ Präsenz-Übungen: wichtigster Teil der Vorl.!

∘ Tägliche Nacharbeiten!

Wird anstrengend, aber zahlt sich aus.

1. Einleitung

Mathematik ist wichtigstes Handwerkzeug in der Physik:

[physikalische Gesetze und Vorgänge lassen sich quantitativ nur mit mathematischen Mitteln formulieren, untersuchen und verstehen („Sprache der Physik").]

Aber: ganz andere Herangehensweise als in der Mathematik selber

[weniger streng, anwendungsorientiert].

Ziele:

- Reaktivierung des Vorwissens.
- Vorbereitung auf Physik- und Mathematikvorlesungen.
- Nochmals: Sie selber sollen aktiv werden.

[„Mikro-Forschung", „Denk-Art" lernen]

Probleme:

- Vorkenntnisse sehr verschieden.
- Wenig Zeit.

Inhalt: lassen Sie sich überraschen.

Vieles kommt in anderen Vorlesungen nochmals „gründlicher".

2. Grundlagen

2.1 Mengen und Zahlen

Eine Menge wird definiert entweder durch Aufzählen ihrer Elemente oder durch Angabe der Eigenschaften ihrer Elemente.

Beisp:

„Definition" („Festsetzung", „was bedeutet das (neue) Symbol A?")

- $A := \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ („Ziffern")

Menge A

u.s.w. (hoffentlich klar!)

u.s.w. bis unendlich; hoffentlich klar, obwohl vollst. Aufzählung unmögl.!

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ (natürliche Zahlen)

traditionelles Symbol

- $\underline{\underline{\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}}}$ (natürl. Zahlen inkl. Null)

- $\underline{\underline{\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}}}$ (ganze Zahlen)

äquivalent:

$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$\pm$ Abk. für „1 und/oder -1"

$\mathbb{Z} := \{n \mid n \in \mathbb{N}_0 \text{ oder } -n \in \mathbb{N}\}$

„Zusatzbedingungen an n"

$\underline{\underline{a \in A}}$ bedeutet: a ist Element der Menge A.

$\underline{\underline{a \notin A}}$ —"— : a ist <u>nicht</u> —"— .

z.B. $0 \in \mathbb{Z}$, $0 \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ usw.

- $G := \{ n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \text{ gerade} \}$ („gerade Zahlen")

Präsenzübung: erfinde äquivalente Definitionen für G.

Lösung: z. B.

$$G := \{ m \in \mathbb{Z} \mid m \text{ gerade} \}$$

$$G := \{ n \in \mathbb{Z} \mid n = 2m, m \in \mathbb{Z} \}$$

$$G := \{ x \in \mathbb{Z} \mid x/2 \in \mathbb{Z} \}$$

$$G := \{ 2\beta \mid \beta \in \mathbb{Z} \}$$

$$G := \{ 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \}$$

• $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ (rationale Zahlen)

• $\mathbb{R} := \{ x \mid x$ kann als Dezimalzahl geschrieben werden$^* \}$

*mit endl. oder unendl. vielen Nachkommastellen.

(reellen Zahlen $\hat{=}$ Zahlengerade $\xrightarrow{\quad\quad} \mathbb{R}$)

$\uparrow$

„entspricht", „äquivalent zu"

z.B. $\underbrace{\frac{5}{7} \in \mathbb{Q}, \frac{5}{7} \in \mathbb{R}}_{\frac{5}{7} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}}$, $\frac{5}{7} \notin \mathbb{Z}$,

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (ohne Bew.), $\underbrace{\underbrace{\sqrt{2} \in \mathbb{R}, -\sqrt{2} \in \mathbb{R}}_{\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in \mathbb{R}}}_{\pm\sqrt{2} \in \mathbb{R}}$

$\mathbb{R}$ ist der wichtigste Zahlenbereich für die Physik

(später noch: komplexe Zahlen $\mathbb{C}$)

- $\emptyset := \{\}$ (leere Menge)

- $L := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$

$\hat{=}$ Lösungsmenge der Gl. $x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$ oder $x = -1$

$\uparrow$

Äquivalenz-Zeichen

$\Rightarrow \quad L = \{1, -1\} = \{\pm 1\}$

$\uparrow$

Implikation / Folgerung

Präsenzübung:

Bestimme analog $\mathbb{B} := \{ x \in \mathbb{R} \mid x^5 + 4x = 4x^3 \}$

Lösung: $\Leftrightarrow \quad x^5 + 4x - 4x^3 = 0 = x\underbrace{(x^4 - 4x^2 + 4)}_{(x^2-2)^2}$ (sollte man wissen!)

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ oder $\underbrace{x^2 - 2 = 0}$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ oder $x = -\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad \mathbb{B} = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\} = \{0, \pm\sqrt{2}\}$

Mehr dazu: Schmidt-Rubart Kap. 1.1

Aber: <u>$\mathbb{R}$ ist mehr als nur eine Menge</u>, nämlich:

(I) Mit den Zahlen aus $\mathbb{R}$ kann man rechnen „wie gewohnt"

(analog für $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, aber $\mathbb{R}$ ist eben am wichtigsten!)

Beisp: Präsenzübungen

- $\frac{3}{5} + \frac{2}{6} = ?$ $\qquad = \frac{18}{30} + \frac{10}{30} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$

- $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} = ?$ $\qquad = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

- $x : \frac{x}{y} = ?$ $\qquad = x \cdot \frac{y}{x} = \frac{xy}{x} = y$

Eventuelle Lücken im „Bruchrechnen" muss man umgehend selbst schliessen!

$\Leftrightarrow$ die 4 Grundrechenarten „funktionieren" nach den gewohnten Regeln: z.B.:

$$a + b = b + a \quad \underbrace{\forall\, a, b \in \mathbb{R}}_{\text{„für alle a und b aus } \mathbb{R}\text{"}}$$

$$a(b+c) = ab + ac \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$$

usw.

$\Leftrightarrow$ die Menge $\mathbb{R}$ ist zusätzlich mit einer sog. algebraischen Struktur „ausgestattet".

(II) Für zwei beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt immer genau eine ($\hat{=}$ „eine und nur eine") der drei <u>Ordnungsrelationen</u>

$$a < b \quad , \quad a = b \quad , \quad a > b$$

„kleiner" „gleich" „grösser"

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}$ ist zusätzlich mit einer <u>Ordnungsstruktur</u> ausgestattet.

Ferner: $a \leq b$ $\hat{=}$ kleiner oder gleich

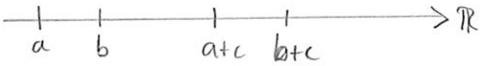
$a \geq b$ analog

„Rechenregeln" sollten wieder bekannt sein (Lücken selbst schliessen).

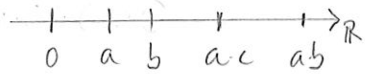
z.B.:

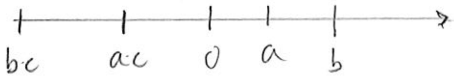
- falls $a<b$ dann $a+c<b+c$ für alle $c\in\mathbb{R}$

kurz: $a<b \Rightarrow a+c<b+c \quad \forall c\in\mathbb{R}$



- $a<b \Rightarrow a\cdot c < b\cdot c \quad \forall\, c>0,$
  $\qquad\qquad a\cdot c > b\cdot c \quad \forall\, c<0.$

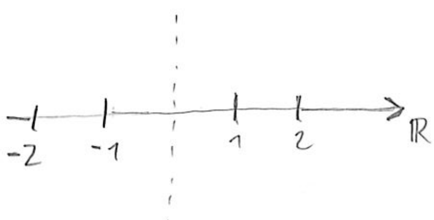




[Beisp.: $1<2$, $c=-1 \Rightarrow$

$1\cdot(-1) = -1 > -2 = 2\cdot(-1)$]

[Anschaulich:



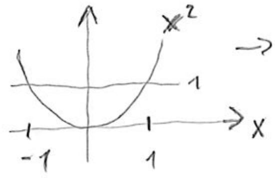
„Spiegelung"]

2.11

Präsenzübung / Hausaufgabe

Bestimme $L := \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 0 \}$.

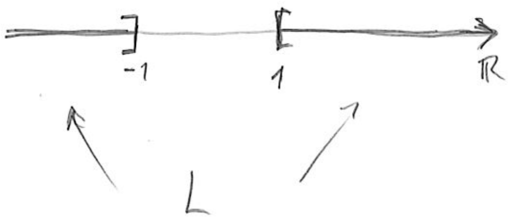
$\hat{=}$ Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 - 1 \geq 0$



→ Kap. 3!

$\Leftrightarrow \quad x^2 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1$ oder $x \leq -1$

$\Rightarrow \quad L = \{ x \mid x \geq 1 \text{ oder } x \leq -1 \}$



Siehe auch: Schmidt-Riebart Kap. 1.2

⇒ weitere „Standardmengen":

- $\underline{\underline{\mathbb{R}^+}} := \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$

- $\underline{\underline{\mathbb{R}_0^+}} := \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$

- $\underline{\underline{\mathbb{R}^-, \mathbb{R}_0^-}}$ analog

Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann heisst:

- $\underline{\underline{[a, b]}} := \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$ abgeschlossenes Intervall

- $\underline{\underline{(a, b)}} := \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$ offenes —"—

- analog $[a, b)$, $(a, b]$ [„halboffen"]

- $\underline{\underline{[a, \infty)}} := \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \}$

„unendlich"