Folgerungen:

1.) $$\underline{\underline{\int_a^a dx\, f(x)}} = F(a) - F(a) \underline{\underline{= 0}}$$

2.) $$\underline{\underline{\int_b^a dx\, f(x)}} = F(a) - F(b) = \underline{\underline{-\int_a^b dx\, f(x)}}$$

3.) $$\underline{\underline{\int_a^b dx\, f(x) + \int_b^c dx\, f(x)}} = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a)$$

$$= \underline{\underline{\int_a^c dx\, f(x)}}$$

4) $$\underline{\underline{\int_a^b dx\, \underbrace{\left(f(x) + g(x)\right)}}} = \left(F(x) + G(x)\right)\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b + G(x)\Big|_a^b$$

Stammfkt: $F(x) + G(x)$, denn $(F(x)+G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$

$$\underline{\underline{= \int_a^b dx\, f(x) + \int_a^b dx\, g(x)}}$$

5.) $$\underbrace{\int_a^b dx\,(c\cdot f(x))}_{} = cF(b) - cF(a) = c\,(F(b) - F(a)) =$$

Stammfkt. $cF(x)$, denn $(cF(x))' = c\,f(x)$

$$= c\cdot\int_a^b dx\,f(x) \qquad \forall\, c\in\mathbb{R}$$

6.) Andere Schreibweise :

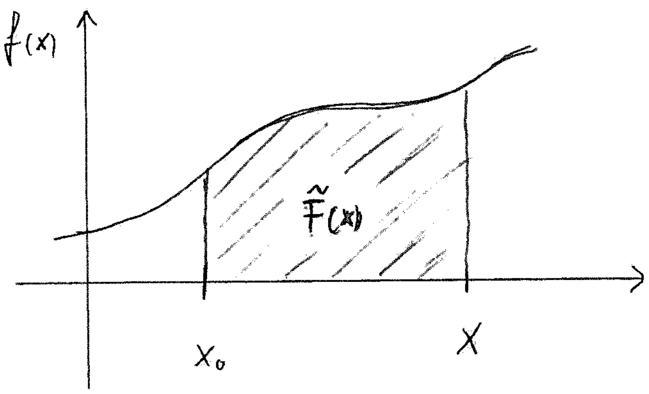
$$\int_{x_0}^{x} dy\,f(y) = F(x) - F(x_0)$$

Betrachte x_0 als bel. aber fest und x als variabel

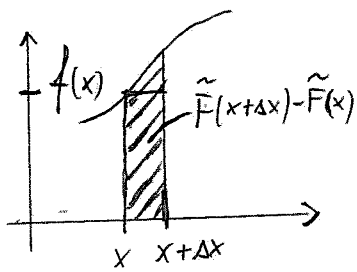
$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} dy\,f(y)}_{\underbrace{\frac{d}{dx}F(x)}_{f(x)} - \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{F(x_0)}_{\text{const.}}}_{0}} = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \int^{x} dy\, f(y) \;\hat{=}\; \int_{x_0}^{x} dy\, f(y) \quad \text{wo } x_0 \text{ „unbestimmt"}.$$

7.) Geometrische Interpretation



$\tilde{F}(x) :=$ schraffierte Fläche (x_0 bel. aber fest, x variabel).



$\Rightarrow \tilde{F}(x+\Delta x) - \tilde{F}(x) \longrightarrow f(x)\cdot\Delta x$ für $\Delta x \to 0$

$$\Rightarrow \tilde{F}'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\tilde{F}(x+\Delta x) - \tilde{F}(x)}{\Delta x} = f(x)$$

$\Rightarrow \tilde{F}(x)$ ist Stammfkt. von $f(x)$.

Ferner muss $\tilde{F}(x_0) = 0$ sein.

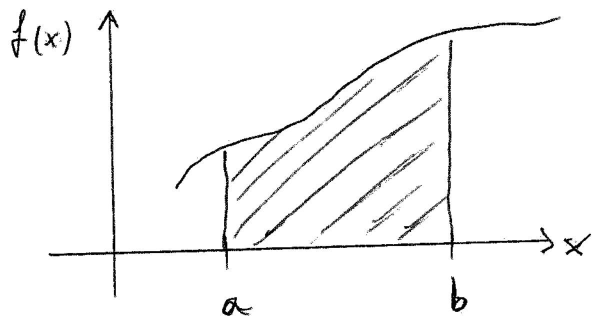
$\Rightarrow \tilde{F}(x) = F(x) - F(x_0)$ für jede bel. Stammfkt. von $f(x)$.

$$\Rightarrow \tilde{F}(x) = \int_{x_0}^{x} dy\, f(y)$$

Fazit:

$$\int_a^b dx\, f(x) \; \left[= F(b) - F(a)\right] \;\hat{=}\; \text{Fläche, die von x-Achse,}$$

Graph von $f(x)$, sowie a und b begrenzt wird:



Kurz: „Fläche unter $f(x)$". [analog zu: $f'(x) \;\hat{=}$ Steigung der Tangente]

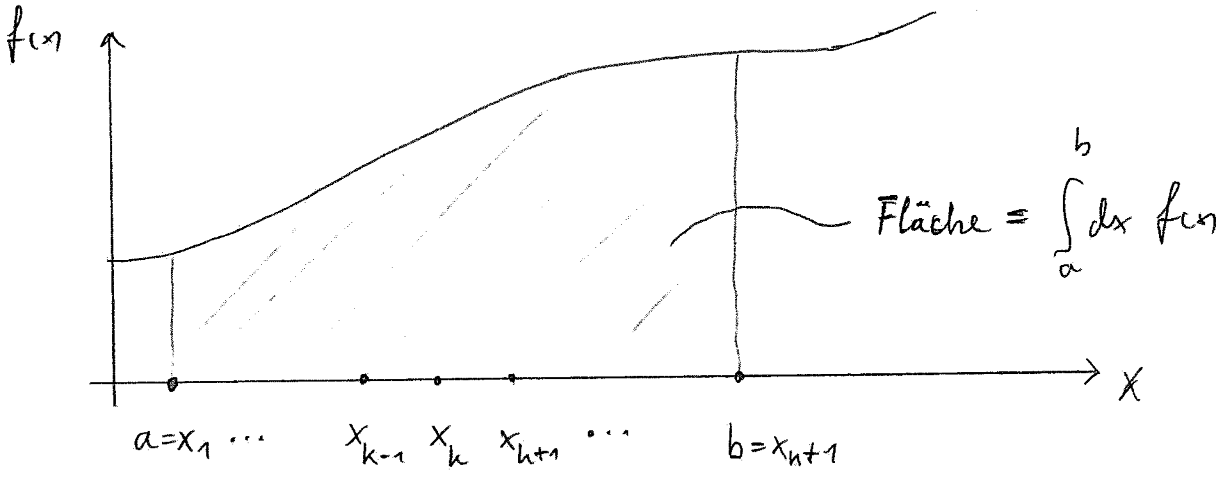
Sog. „Hauptsatz der Integralrechnung".

Bem:

a) Falls $b < a \Rightarrow$ Faktor (-1).

b) Falls $f(x) < 0 \Rightarrow$ Faktor (-1).

c) Betrachte:



$$\delta x_k := x_{k+1} - x_k \quad , \quad k = 1, \dots, n \qquad (\text{„Intervalle"})$$

$$\tilde{x}_k \in [x_k, x_{k+1}] \quad , \quad k = 1, \dots, n \qquad (\text{„Stützstellen"})$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{x}_k)\, \delta x_k}_{\text{sog. Riemann-Summe}} \xrightarrow[\delta x_k \to 0 \ \forall k]{n \to \infty} \underbrace{\int_a^b dx\, f(x)}_{\text{sog. Riemann-Integral}}$$

[In der Mathem. benutzt man dies als Def. von $\int_a^b dx\, f(x)$ und entwickelt daraus „rückwärts" das ganze bisherige Kap. 11.]

11.2 Integrationstechniken

[Systematische „Methoden", die „immer funktionieren" (analog zu „Ableitungsregeln") gibt es nicht, aber doch einige „Verfahren", die „oft funktionieren"]

1.) Integrand von der Form

(a) $f(x) = c \cdot (g(x))^n \cdot g'(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$, $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $F(x) = c \cdot \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1}$ ist Stammfkt.

Bew: $F'(x) = \frac{c}{n+1} \underbrace{\left((g(x))^{n+1}\right)'}_{(n+1)(g(x))^n \cdot g'(x)} = f(x)$

Beisp: $f(x) = \frac{(\ln x)^n}{x}$ $\Rightarrow g(x) = \ln x$, $c = 1$ $\Rightarrow$ $F(x) = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}$

(b) $$\underline{\underline{f(x) = c \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}}} \qquad (\Leftrightarrow n = -1 \text{ in (a)})$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{F(x) = c \cdot \ln(g(x))}}$$

Bew: $F'(x) = \frac{c}{g(x)} \cdot g'(x) = f(x)$

<u>Beisp.:</u>

- $\underline{f(x) = \tan(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow g(x) = \cos x\,, \; c = -1$

  $$\Rightarrow \underline{F(x) = -\ln(\cos x)}$$

- $\underline{f(x) = \frac{1}{a+bx}} \Rightarrow g(x) = a+bx\,, \; g'(x) = b\,, \; c = \frac{1}{b}.$

  $$\Rightarrow \underline{F(x) = \frac{1}{b} \ln(a+bx)}$$

2.) Partielle Integration:

Integrand von der Form $u'(x) \cdot v(x)$ $\Rightarrow$

$$\int_a^b dx\; u'(x) \cdot v(x) = u(x)\, v(x) \Big|_a^b - \int_a^b dx\; u(x) \cdot v'(x)$$

Bew: $$\int_a^b dx\; \underbrace{\left[u'(x)\, v(x) + u(x) \cdot v'(x) \right]}_{(u(x) \cdot v(x))'} = u(x)\, v(x) \Big|_a^b$$

(Produktregel)

$$= \int_a^b dx\; u'(x)\, v(x) + \int_a^b dx\; u(x)\, v'(x)$$

Beisp:

a) $$\underbrace{\int_a^b dx\, e^x x}_{F(x)=?!} = \underbrace{\int_a^b dx\, (\overset{\uparrow}{\underset{u}{e^x}})' \overset{\uparrow}{\underset{v}{x}}}_{\text{muss man „sehen"!}} = e^x \cdot x \Big|_a^b - \int_a^b dx\, \underbrace{e^x}_{f(x) \Rightarrow F(x) = e^x} \overbrace{(x)'}^{1} = e^x x \Big|_a^b - e^x \Big|_a^b$$

$$= \left(e^x \cdot x - e^x\right)\Big|_a^b$$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{F(x) = e^x(x-1) \text{ ist Stammfkt. von } f(x) = x e^x}}$

b) $$\underbrace{\int_a^b dx\, \ln x}_{F(x)=?!} = \underbrace{\int_a^b dx\, (\overset{\uparrow}{\underset{u}{x}})' \overset{\uparrow}{\underset{v}{\ln x}}}_{\text{muss man „sehen"!}} = x \ln x \Big|_a^b - \int_a^b dx\, \underbrace{x}_{f(x) \Rightarrow F(x) = x} \cdot \overbrace{(\ln x)'}^{\frac{1}{x}} =$$

$$= x \ln x \Big|_a^b - x \Big|_a^b = (x \ln x - x)\Big|_a^b$$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{x \ln x - x \text{ ist Stammfkt. von } \ln x}}$

c) <u>Satz von Taylor</u> (im Kap. 9 versprochener Bew.):

Sei $b \in \mathbb{R}$ bel. aber fest (und $f(x)$ hinreichend oft diff'bar)

$$\Rightarrow \quad f(b) = f(0) + r_0$$

f ist Stammfkt. von f'

$$r_0 := f(b) - f(0) = \int_0^b dx \underbrace{f'(x)}_{u'(x)\cdot v(x) \text{ mit } u(x) := -(b-x),\ v(x) := f'(x)} =$$

$$= \underbrace{-(b-x) f'(x) \Big|_0^b}_{-(b-b)f'(b) + (b-0)f'(0) = b f'(0)} - \int_0^b dx \left(-(b-x)\right) f''(x)$$

$$= b f'(0) + r_1$$

$$r_1 := \int_0^b dx \underbrace{(b-x) f''(x)}_{u'(x)\, v(x) \text{ mit } u(x) := -\frac{(b-x)^2}{2},\ v(x) := f''(x)}$$

$$= -\frac{(b-x)^2}{2} f''(x) \Big|_0^b - \int_0^b dx \left(-\frac{(b-x)^2}{2}\right) f'''(x)$$

$$= \frac{b^2}{2!} f''(0) + r_2$$

$$r_2 := \int_0^b dx \, \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x) =$$

$$= \dots = \frac{b^3}{3!} f'''(0) + r_3$$

u.s.w.

$$\Rightarrow f(b) = f(0) + b f'(0) + \frac{b^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{b^n}{n!} f^{(n)}(0) + r_n$$

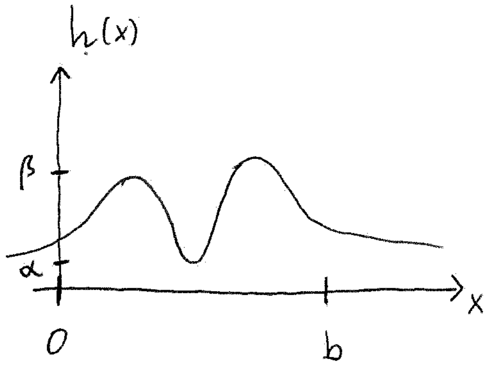
$$r_n := \int_0^b dx \, \frac{(b-x)^n}{n!} h(x) \quad , \quad h(x) := f^{(n+1)}(x)$$

Falls $b \geq 0$ und $\alpha := \min_{x \in [0,b]} h(x)$, $\beta := \max_{x \in [0,b]} h(x)$ folgt

$$r_n \geq \frac{\alpha}{n!} \int_0^b dx \underbrace{(b-x)^n}_{=: g(x) \Rightarrow G(x) = -\frac{(b-x)^{n+1}}{n+1}} = \frac{\alpha}{(n+1)!} \left(-(b-b)^{n+1} + (b-0)^{n+1} \right) = \alpha \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}$$

Analog: $r_n \leq \beta \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}$ ...

$\Rightarrow r_n = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \gamma$ für ein geeignetes $\gamma \in [\alpha, \beta]$



$\Rightarrow$ es gibt ein $z \in [0,b]$ mit $h(z) = \gamma$ (falls h stetig auf $[0,b]$).

Falls $b < 0$: genauso. Für $x := b$ folgt:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + r_n$$

$$r_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \underbrace{h(z)}_{f^{(n+1)}(z)}$$ für ein geeigneten z zw. 0 und x

q.e.d.