$$\Rightarrow \quad e^{iz} + e^{-iz} = \cos(z) + i\sin(z) + \underbrace{\cos(-z)}_{\cos(z)} + i\,\underbrace{\sin(-z)}_{-\sin(z)}$$

$$= 2 \cdot \cos(z) \quad \Leftrightarrow$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = \cos z + i \sin z - (\cos z - i \sin z) = 2i \sin z \quad \Leftrightarrow$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Gilt alles insbes. für $z \in \mathbb{R}$.

Speziell für $z = \pi$:

$$e^{i\pi} = \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + i \underbrace{\sin(\pi)}_{0} = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{e^{i\pi} + 1 = 0}}$$

[erstaunliche Verknüpfung zw. wichtigsten Zahlen der Mathematik: $e, \pi, 1, 0, i$!]

$$\Rightarrow \quad e^{i\pi + i\pi} = \left(e^{i\pi}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{e^{2\pi i} = 1}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{e^{z+2\pi i}}} = e^{z} \cdot e^{2\pi i} \underline{\underline{= e^{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}}}$$

6.) Differenzieren :

(fast) Wort für Wort wie „im Reellen" (nur „zeichnen"

kann man jetzt nicht mehr !).

z. B. :

- Alle „Ableitungsregeln".
- $\left(z^k\right)' = k\, z^{k-1} \quad \forall\, z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}$
- $\left(e^z\right)' = e^z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$
- $(\sin z)' = \cos z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$

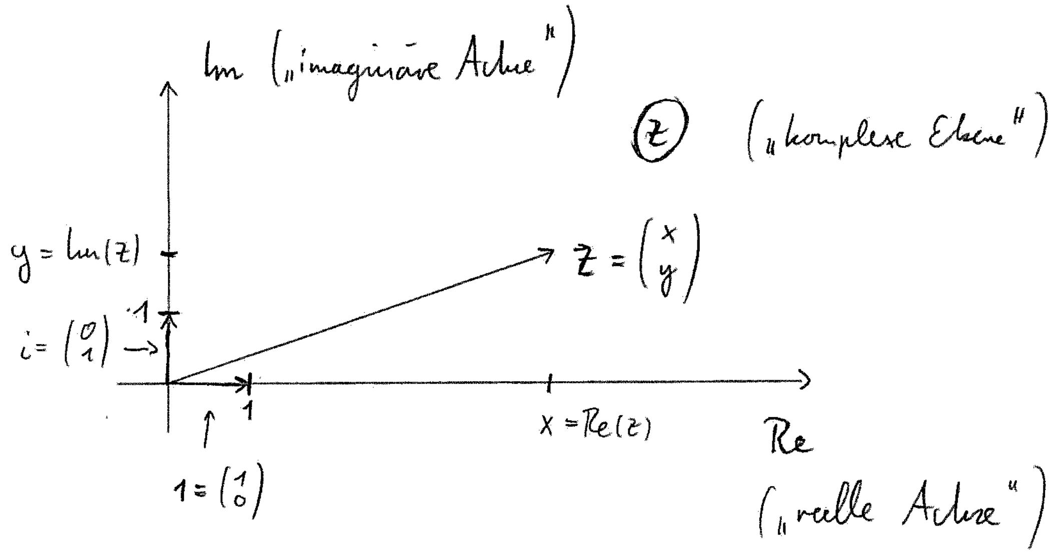
usw.

10.2 Gaußsche Zahlenebene (komplexe Ebene)

$$\underline{z = x + iy} \in \mathbb{C} \quad \overset{\text{eineindeutig}}{\longleftrightarrow} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{„Ebene"})$$

D.h. $z \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ oder etwas ungenau: $\underline{z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$

„entspricht" / „äquivalent zu" ...



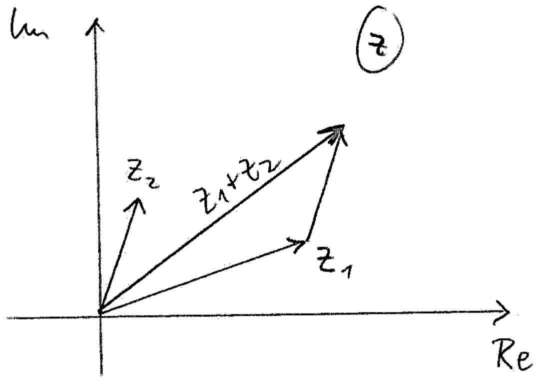
$\Rightarrow$ „Betrag" $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ genau wie im $\mathbb{R}^2$!

$\underline{z^*} = x - iy \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$: <u>Spiegelung an reeller Achse</u>

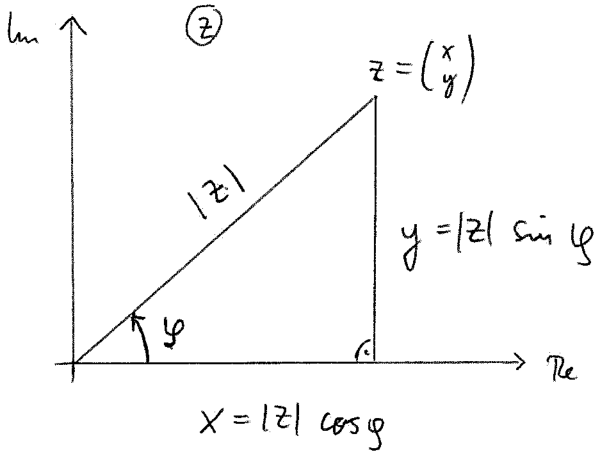
Addition : $z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

genau wie in $\mathbb{R}^2$!



Betrachte:



$$\underline{\underline{\varphi =: \arg(z) \overset{!}{\in} [0, 2\pi)}} \quad \text{„Argument von } z\text{"}$$

$$\left(\arg(0) := 0 \right)$$

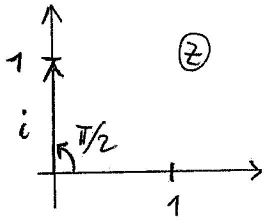
[Somit $\arg(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ definiert.]

$$\Rightarrow \quad z = x + iy = |z| \cos\varphi + i\,|z| \sin\varphi$$

$$= |z| \underbrace{\left(\cos\varphi + i \sin\varphi\right)}_{e^{i\varphi}}$$

$$\underline{\underline{z = |z|\, e^{i \arg(z)}}} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

<u>Beisp:</u> $z = i$



$$\Rightarrow \quad |i| = 1 \quad , \quad \arg(i) = \pi/2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{i}} = |i|\, e^{i \arg(i)} = \underline{\underline{e^{i\pi/2}}}$$

$$\left[= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = i \quad \checkmark \right]$$

$\sim$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{z_1 \cdot z_2}} = |z_1|\, e^{i \arg(z_1)} \; |z_2|\, e^{i \arg(z_2)}$$

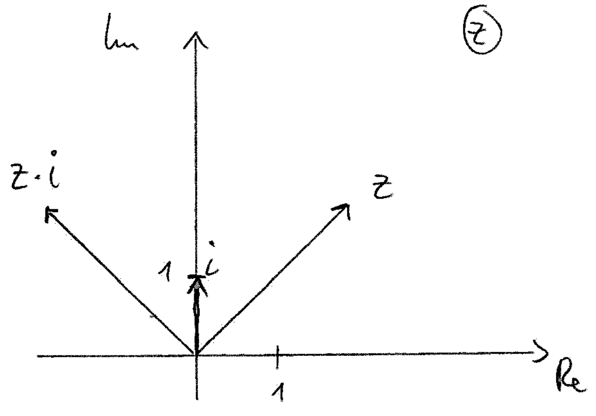
$$= \underline{\underline{\underbrace{|z_1| \cdot |z_2|}_{|(z_1 \cdot z_2)|} \; e^{i \overbrace{\left(\arg(z_1) + \arg(z_2)\right)}^{}}}}$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) \quad (\text{modulo } 2\pi)$$

d.h. <u>komplexe Multipl.</u> heisst: Längen werden multipliziert, Winkel werden addiert („<u>Drehstreckung</u>").

<u>Beisp:</u>

$$z \cdot i = |z|\, e^{i \arg(z)} \underbrace{|i|}_{1} e^{i \underbrace{\arg(i)}_{\pi/2}} = |z|\, e^{i\left(\arg(z) + \frac{\pi}{2}\right)}$$



Logarithmus und Potenzen

Def.:

$$\underline{\underline{\ln(z) := \underbrace{\ln|z|}_{\text{reeller Log. von } |z| \in \mathbb{R}^+} + i \arg(z)}} \quad \forall\, z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$$

$$\underline{\underline{b^z := e^{z \ln b}}} \quad \forall\, b, z \in \mathbb{C},\ b \neq 0$$

Bem.:

- Für $z \in \mathbb{R}^+$: $|z| = z$, $\arg(z) = 0$ $\Rightarrow$ $\ln(z)$ wie bisher
- Für $b \in \mathbb{R}^+$: b^z wie bisher, ebenso z^n mit $n \in \mathbb{Z}$.

Beisp:

1.) Für $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt:

$$z^\alpha = e^{\alpha[\ln|z| + i\arg(z)]} = \underbrace{e^{\alpha \ln|z|}}_{(\underbrace{e^{\ln|z|}}_{|z|})^\alpha} \cdot e^{\alpha i \arg(z)}$$

(alles reell!)

$$z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha\arg(z)}$$

2.) Für $x \in \mathbb{R}^+$ ist $\arg(-x) = \pi$

$$\Rightarrow \sqrt{-x} := (-x)^{1/2} \overset{1.)}{=} \underbrace{|-x|^{1/2}}_{x^{1/2}} \underbrace{e^{i\frac{1}{2}\pi}}_{=i}$$

, siehe oben

$$\sqrt{-x} = i\sqrt{x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+$$

[nicht $-i\sqrt{x}$ oder $\pm i\sqrt{x}$!]

$$\Rightarrow \sqrt{-1} = i$$

(nicht $\pm i$!)

11 Integralrechnung

Integrieren $\hat{=}$ „Umkehrung" von Differenzieren.

Genauer: Gegeben sei eine reelle Fkt. $f(x)$. Gesucht ist eine Fkt. $F(x)$ mit der Eigenschaft

$$F'(x) = f(x) .$$

Name: $F(x)$ heisst Stammfkt. von $f(x)$.

Schreibweise: $F(x) =: \int^x dy\ f(y)$

oder auch $F(x) = \int dy\ f(y)$ („unbestimmtes Integral")

Äquivalent: $\int^x f(y)\,dy\ ,\ \int^x dz\ f(z)\ ,\ \int^x dw\ f(w)$ usw.

(aber nicht $\int^x dx\ f(x)$!)

Folgerung:

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{\int^x dy\, f(y)}_{F(x)}}_{F'(x)\,=\,f(x)} = f(x)$$

Beisp:

$f(x)$	$F(x)$	
e^x	e^x	, denn $(e^x)' = e^x$
e^{2x}	$\frac{1}{2} e^{2x}$	, denn $(e^{2x})' = 2e^{2x}$
$\cos x$	$\sin x$	
$\sin x$	$-\cos x$	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$(n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1)$, denn $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$

Bem:

1.) Falls $F(x)$ Stammfkt von $f(x)$, dann auch

$F(x) + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$, d.h. Stammfkt nicht eindeutig.

(Denn: $(F(x)+c)' = F'(x) + c' = F'(x) = f(x)$.)

2.) Integrieren ist im Allg. „schwieriger" als Ableiten.

„Kunst" „Handwerk"

3.) Einfachste „Methode": errate/vermute $F(x)$ und

teste dann, ob $F'(x) = f(x)$. [falls nicht: „verbessere" Vermutung]

4.) Typ. Anwendung: gegeben sei Geschw. $v(t) = \dot{x}(t)$

eines Teilchens. Finde $x(t)$ (Ort).

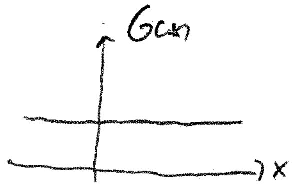
5.) Für welche $f(x)$ existiert $F(x)$ überhaupt? → Analysis-Vorl.

6.) Umkehrung von 1.): Seien $F(x)$ und $G(x)$ Stammfkt von $f(x)$.

Definiere $H(x) := F(x) - G(x)$.

$\Rightarrow \quad H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$

Anschaulich folgt: $H(x) = \text{const}$



$\Rightarrow \quad G(x) = F(x) + c$

Fazit: alle Stammfkten von $f(x)$ sind von der Form $F(x)+c$

[es gibt keine anderen/weiteren]

10.1 Bestimmtes Integral

Def.: Sei $F(x)$ Stammfkt. von $f(x)$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann heisst

$$\int_a^b dx\, f(x) := F(b) - F(a) \qquad \underline{\text{bestimmtes Integral}}.$$

Bem: jede andere Stammfkt. $F(x)+c$ ergibt selbes Resultat.

Äquivalent: $\int_a^b f(x)\, dx$, $\int_a^b dy\, f(y)$, $\int_a^b dw\, f(w)$ usw.

[„Name der Integrationsvariable ändert nichts am Wert des Integrals."]

Schreibweise: $F(b) - F(a) =: F(x) \Big|_a^b$

$$\Rightarrow \int_a^b dx\, f(x) = F(x) \Big|_a^b$$

Beisp.:

1.) $$\underline{\underline{\int_0^1 dx \underbrace{x^5}_{f(x)}}} = \underbrace{\frac{x^6}{6}}_{F(x)} \Big|_0^1 = \frac{1^6}{6} - \frac{0^6}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

2.) $$\underline{\underline{\int_{-2}^2 dx \underbrace{e^{2x}}_{f(x)}}} = \underbrace{\frac{1}{2} e^{2x}}_{F(x)} \Big|_{-2}^2 = \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^{-4} = \underline{\underline{\sinh(4)}}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

3.) $$\underline{\underline{\int_0^\pi dx \underbrace{\sin x}_{f(x)}}} = \underbrace{-\cos x}_{F(x)} \Big|_0^\pi = -\underbrace{\cos \pi}_{-1} + \underbrace{\cos 0}_{1} = \underline{\underline{2}}$$

4.) $v(t) = a \cdot t$ „Geschw. bei konstanter Beschl. a".

$\Rightarrow$ $x(t) = \frac{1}{2} a t^2$ („Ort") ist Stammfkt.,

denn $\dot{x}(t) = at = v(t)$ ✓

$$\Rightarrow \int_0^t dt' \, v(t') = \underbrace{x(t')\Big|_0^t}_{x(t) - x(0)} = \frac{1}{2} a t^2 - \frac{1}{2} a \, 0^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x(t) = x(0) + \frac{1}{2} a t^2$$