

9. Taylor-Reihen

Frage: Wie gut kann man eine Fkt. $f(x)$ mittels Polynomen

approximieren und mittels Potenzreihen [„unendl. Polynome“] ev.

sogar exakt reproduzieren? (Vgl. Ende Kap. 3.4).

Beisp:

Geom. Reihe: $\frac{1}{1-r} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \quad \forall |r| < 1 \quad (\text{Kap. 5.2})$

\Rightarrow Die Fkt. $f(x) := \frac{1}{1-ax}$ lässt sich auch schreiben als

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (ax)^k \quad \text{falls } |ax| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{|a|} \quad \text{oder}$$

mit $c_k := a^k$ als

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (\text{Potenzreihe}).$$



Nehmen wir also einmal an :

(i) $f(x)$ kann als Potenzreihe geschrieben werden (d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \text{ für geeignet gewählte } c_k$$

(ii) $f(x)$ ist bel. oft diff'bar.

$$\Rightarrow f(0) = c_0 \cdot 1 \quad \begin{array}{l} \swarrow \\ 0^0 := 1, \quad 0^k = 0 \quad \forall k \geq 1 \end{array}$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot k x^{k-1}$$

\uparrow
 0 für $k=0$

$$\Rightarrow f'(0) = c_1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot k \cdot (k-1) x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} c_k \cdot k \cdot (k-1) x^{k-2}$$

\uparrow
 0 für $k=1$

$$\Rightarrow f''(0) = c_2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$$

usw : $f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k \cdot k \cdot (k-1) \cdots (k-n+1) x^{k-n}$

$$f^{(n)}(0) = c_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots 1 \cdot 1 = c_n \cdot n!$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \Leftrightarrow \quad c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}$$

("Taylor-Reihe" oder
"Taylor-Entwicklung um 0")

[oder "Taylor-Formel"]

Beisp:

$$1.) \quad f(x) := \exp(x+y) \quad , \quad y \in \mathbb{R} \text{ bel. aber fest.}$$

\Rightarrow (ii) erfüllt, (i) später,

$$f'(x) = \exp(x+y) \cdot \underbrace{(x+y)'}_{=1} = f(x)$$

$$\Rightarrow f^{(k)}(x) = f(x) \quad \forall k \quad \Rightarrow f^{(k)}(0) = f(0) = \exp(y) \quad \forall k$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \exp(y) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}_{\exp(x)}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

\cong in Kap. 5.4 versprochenen Bew!

[kein Zirkelschluss: nur Def. von $\exp(x)$ und Ableitungsregeln benutzt]

2.)

$f(x) := \sin x \Rightarrow$ (ii) \checkmark , (i) später.

$$\Rightarrow f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x \text{ usw.}$$

$$\Rightarrow f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(0) = 0, \text{ u.s.w.}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{1}{1!} x^1 - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(2j+1)!} x^{2j+1}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

(so macht's der Taschenrechner!)

3.) Viele weitere Beisp. in Übungen, z.B.

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$



Frage 1: Wie gut lässt sich $f(x)$ approximieren durch

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \left[\text{"Taylor-Polynom"} \right] \quad ?$$

[„abgebrochene Taylor-Reihe“]

Frage 2: $p_n(x) \rightarrow f(x)$ für $n \rightarrow \infty$?

Antwort steckt im

Satz von Taylor:

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x)$$

wo

$$r_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \left(\text{"Restglied"} \right)$$

für ein geeignet gewähltes z zwischen 0 und x

(falls $f(x)$ hinreichend oft diff'bar).

Bew.: später (Kap. 11).

$$\Rightarrow \text{Antwort 1: } |f(x) - p_n(x)| = |r_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(z)|$$

$$\text{Antwort 2: } p_n(x) \rightarrow f(x) \Leftrightarrow r_n(x) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

(präzisiert bzw ersetzt (i)).

Bew.: Falls für alle z zwischen 0 und x gilt:

$$\underline{\underline{|f^{(n)}(z)| \leq a \cdot q^n}} \text{ für geeignet gewählte } a, q \in \mathbb{R}^+,$$

$$\underline{\underline{\text{dann folgt } |r_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} a q^{n+1} = a \frac{|qx|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0}}$$

$$\text{für } n \rightarrow \infty \text{ (sonst würde } \exp(|qx|) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|qx|^k}{k!} \text{ nicht}$$

konvergieren!).

$$\text{Beisp 1: } f^{(n)}(x) = f(x) = \exp(x+y) \Rightarrow \text{wähle } a = \exp(|x|+|y|) \text{ und } q=1.$$

$$\text{Beisp 2: } |f^{(n)}(x)| = \underbrace{|\sin x|}_{\leq 1} \text{ oder } \underbrace{|\cos x|}_{\leq 1} \Rightarrow \text{wähle } a=1, q=1.$$

Bem:

- Ableitungen von $f(x)$ bei $x=0$ liegen also $f(x)$ bereits fest!
- Ziemlich offensichtlich: je kleiner x , desto schneller wird $r_n(x)$ klein.
- Im Allg. hängt z im Restglied von x und von n ab.
- Genauere Angabe von z meist schwierig und gar nicht benötigt.
- „Physiker - Schreibweise“:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

„Term (bzw. „Fehler“) der Ordnung x^{n+1} “

d.h. dieser Term steht für kleine x (bzw. $|x|$) mindestens genau

so rapide nach 0 wie x^{n+1} .

- Betrachte „Hilfsfkt.“: $g(x) := f(x+x_0)$ mit einem bel. „Referenzpkt.“ x_0 .

$$\Rightarrow g(0) = f(x_0), \quad g'(0) = f'(x_0), \quad \dots, \quad g^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0)$$

$$\Rightarrow g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \stackrel{= f^{(k)}(x_0)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} x^k$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{f(x+x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} x^k}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k}$$

(Taylor-Entwicklung um x_0),

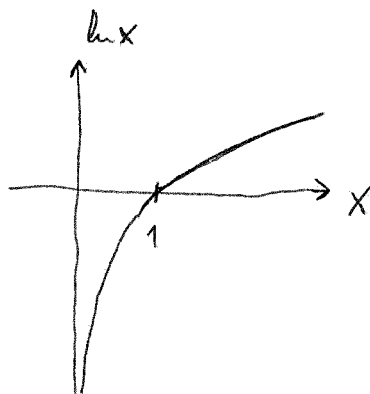
analog: $P_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k,$

$$r_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad \text{mit } z \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x,$$

usw.

Beisp:

$$f(x) := \ln x, \quad x_0 = 1$$



$$\Rightarrow f(x_0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x_0) = 1$$

$$f''(x) = (x^{-1})' = (-1)x^{-2}, \quad f''(x_0) = -1$$

$$f'''(x) = (-1)(x^{-2})' = \underbrace{(-2)}_{(-2)} x^{-3} \Rightarrow f'''(x_0) = 2 \quad \text{usw.}$$

$$\Rightarrow f(x+x_0) = \underbrace{f(x_0)}_0 + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!}}_1 x + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}}_{-\frac{1}{2}} x^2 + \underbrace{\frac{f'''(x_0)}{3!}}_{\frac{1}{3}} x^3 + \dots$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

Genauere Betrachtung: Konvergenz (d.h. $r_n(n) \rightarrow 0$) $\Leftrightarrow |x| < 1$.

Aber: jedes $y > \frac{1}{2}$ lässt sich schreiben als $y = \frac{1}{1+x}$ mit $|x| < 1$.

Wegen $\ln\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\ln(1+x)$ erhält man so auch $\ln y \quad \forall y > 1/2$.

[auch Taschenrechner macht das (in Prinzip) so]

Weitere Beisp: \ddot{U}

Anwendung

Frage: Wenn $f(x)$ und $g(x)$ beide $\rightarrow 0$ für $x \rightarrow x_0$, was passiert dann

mit $\frac{f(x)}{g(x)}$?

Antwort:
$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{=0} + f'(x_0)(x-x_0) + \mathcal{O}((x-x_0)^2)$$

$$g(x) = \underbrace{g(x_0)}_{=0} + g'(x_0)(x-x_0) + \mathcal{O}((x-x_0)^2)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)(x-x_0) + \mathcal{O}((x-x_0)^2)}{g'(x_0)(x-x_0) + \mathcal{O}((x-x_0)^2)} = \frac{f'(x_0) + \mathcal{O}(x-x_0)}{g'(x_0) + \mathcal{O}(x-x_0)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{falls } f(x_0) = g(x_0) = 0$$

"Regel von de l'Hospital"

Beisp: $f(x) = \ln(1+x)$, $g(x) = x$, $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{x'} = 1$$

Somit $\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} \rightarrow 1} = e^1 = e \quad \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) \rightarrow 1$$

$$\underline{\underline{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e}}$$

\Rightarrow die Folge $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen e .

[dicht: schwierig \Leftrightarrow Mathem. $\hat{=}$ Vermeidung komplizierte

Rechnungen!]

