5.) $\underline{\underline{b^x \cdot b^y = b^{(x+y)} =: b^{x+y}}}$ $\quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}\,,\ b \in \mathbb{R}^+$

Bew: $b^x \cdot b^y = \exp(x \ln b) \cdot \exp(\cancel{x}\, y \ln b) = \exp(x \ln b + y \ln b)$

$= \exp((x+y) \ln b) = b^{(x+y)}$.

Folgerung : $b^x \cdot b^{-x} = b^0 = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{b^{-x} = \frac{1}{b^x}}}$

6.) $\underline{\underline{(b^x)^y = b^{(x \cdot y)} =: b^{x \cdot y}}}$ $\quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}\,,\ b \in \mathbb{R}^+$

Bew: $(b^x)^y = \exp(y \underbrace{\ln(b^x)}_{= x \cdot \ln b \text{ siehe 4.)}})$

$= \exp(y\, x \cdot \ln b) = b^{(x \cdot y)}$

[Aber : im Allg. $b^{(x^y)} \neq (b^x)^y$!
 „ungleich"]

7.) $\underline{\underline{(\exp(x))^y}} = (e^x)^y = e^{(x \cdot y)} = \underline{\underline{\exp(x \cdot y)}}$ [Gegenstück zu 4.)]

8.) $\underline{\underline{a^x \cdot b^x = (a\cdot b)^x}}$ $\quad \forall\ a,b \in \mathbb{R}^+,\ x\in\mathbb{R}$

Bew: $a^x \cdot b^x = \exp(x \ln a)\exp(x\ln b) = \exp(x\ln a + x\ln b)$

$$= \exp(x\,\underbrace{[\ln a + \ln b]}_{=\ln(a\cdot b)}) = \exp(x\cdot \ln(a\cdot b)) = (a\cdot b)^x$$

- All dies ist für $x = n \in \mathbb{N}$ in Übereinstimmung mit:

(i) $b^n := \underbrace{b\cdot b\cdots b}_{n \text{ Stück}}$, $b^{-n} := \frac{1}{b^n}$ (hier ist aber auch $b \leq 0$ erlaubt!)

(ii) $(b^{\frac{1}{n}})^n = b^{\frac{1}{n}\cdot n} = b^1 = b$, d.h. $\underline{\underline{\sqrt[n]{b} := b^{\frac{1}{n}}}}$ ist diejenige <u>positive</u> Zahl, die n-mal mit sich selbst multipliziert b ergibt.

- 5.) + 6.) + 8.) heissen <u>„Potenzgesetze"</u>

<u>Def.:</u> Für ein beliebiges $b \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$ heisst die Fkt.

$$\log_b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \log_b(x) := \frac{\ln x}{\ln b}$$

<u>der Logarithmus zur Basis b</u>

Speziell :

Andere Namen:

- $\underline{\mathrm{ld}(x)} := \log_{10}(x)$ (dekadischer Log.) — $\log(x)$, $\lg(x)$
- $\underline{\mathrm{lb}(x)} := \log_2(x)$ (binärer Log.) — $\mathrm{ld}(x)$
- $\underline{\ln(x)} := \log_e(x)$ (natürlicher Log.) — $\log(x)$

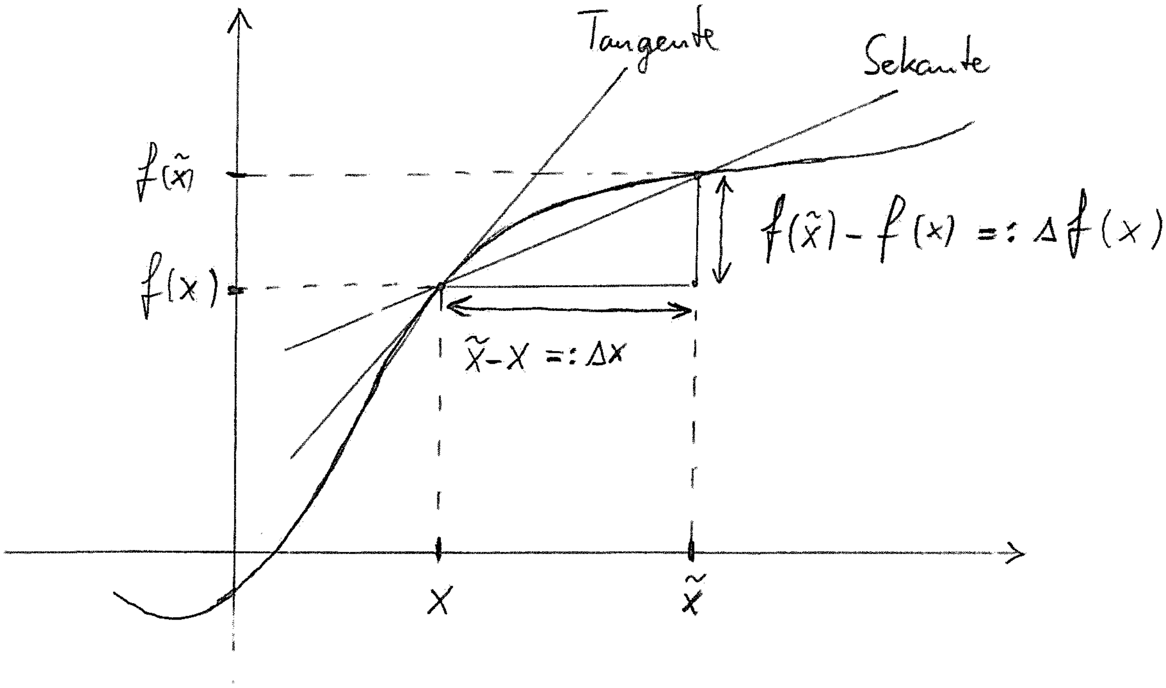
Mehr dazu: Übungen.

8 Differentialrechnung

[Ausführlich in Schule u. Analysis-Vorl. ⇒ hier relativ kurz]

8.1 Die Ableitung

Betrachte eine Fkt. f in der Nähe eines „Referenzpunktes" x:



[x „fest", $\tilde{x}$ „fliessend"]

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} \mathrel{\hat{=}} \underline{\text{Steigung der Sekante}} \quad (\text{„Differenzenquotient"})$$

geht für $\tilde{x} \to x$ bzw $\Delta x \to 0$ über in

[„df-nach-dx"]

$$\underline{\frac{df(x)}{dx} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \mathrel{\hat{=}} \text{Steigung der Tangente}} \quad (\text{„Differentialquotient"})$$

Voraussetzung: Limes existiert und unabh. davon, ob sich $\tilde{x}$ „von oben" oder „von unten" an x annähert (aber immer $\tilde{x} \neq x$)!

$\Leftrightarrow$ „ f ist <u>differenzierbar</u> an der Stelle x ".

$\Leftrightarrow$ f hat bei x keinen „Knick" oder „Sprung".

Name: Ableitung (von f an der Stelle x).

Andere Schreibweisen:

$$\lim_{\tilde{x}\to x} \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

[von oben oder unten, aber immer $\tilde{x} \neq x$; analog]

$$= \frac{d}{dx} f(x) = \frac{df}{dx}(x) = \underline{\underline{f'(x)}}$$ [„f-Strich"]

Präziser Def: Analysis.

<u>Beachte:</u> Falls f auf ganz $\mathbb{R}$ (d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$) oder einem Teilbereich davon differenzierbar, dann ist <u>$f'(x)$ selbst wieder eine Fkt. von x.</u>

Wie immer: Auch ganz andere Namen möglich, z.B.:

Fkt.:	Ableitung:
$f(t)$	$\frac{d}{dt}f(t) =: \dot{f}(t)$ ($f'(t)$ unüblich!) ← „f-Punkt"
$x(t)$ (z.B. "Ort")	$\dot{x}(t) =: v(t)$ (z.B. „Geschw.")

genauer: $\dot{x}(t) \mathrel{\hat{=}}$ Momentangeschw.

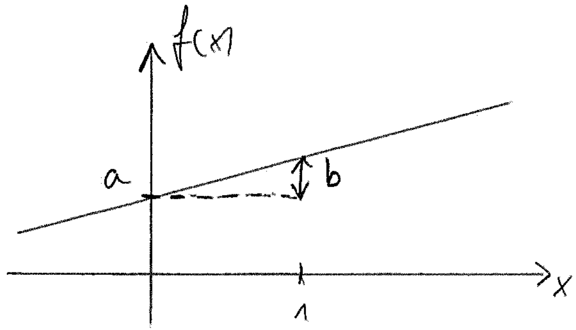
$\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \mathrel{\hat{=}}$ mittlere Geschw. [von t bis $t+\Delta t$]

$g(y)$	$g'(y) = \frac{d\,g(y)}{dy} = \frac{d}{dy}g(y)$ usw.
$w(q)$	$w'(q)$

usw.

Beisp:

1.) $f(x) := a + bx$



„Gerade mit Steigung b". [vgl. Kap. 3.4, S 3.15]

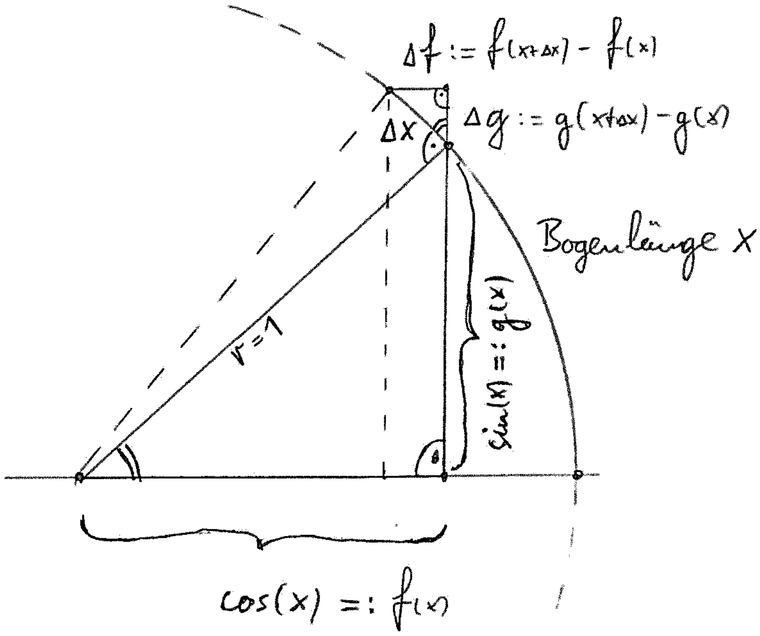
$$\Rightarrow f(\tilde{x}) - f(x) = a + b\tilde{x} - (a + bx) = b(\tilde{x} - x)$$

$$\Rightarrow \lim_{\tilde{x} \to x} \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} = b ,$$

d.h. $f(x)$ an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ diff'bar und

$$f'(x) = b \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2.) Betrachte Einheitskreis:

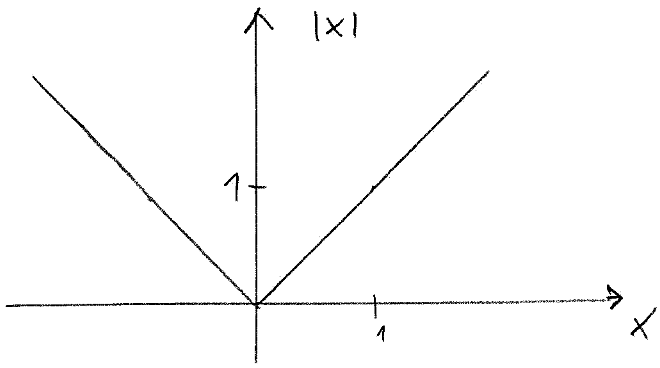


- Gleicher Winkel $\measuredangle$ im grossen und kl. Dreieck wenn $\Delta x \to 0$.
- Für $\Delta x \to 0$ wird $\dfrac{\Delta g}{\Delta x} = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \cos(x)$
- Beachte: $\Delta f < 0 \Rightarrow \dfrac{-\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \sin(x)$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}}_{\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx}\sin(x)} = \cos(x) \quad , \quad \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}_{\frac{d}{dx}\cos(x)} = -\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\sin'(x) = \cos(x)}} \quad , \quad \underline{\underline{\cos'(x) = -\sin(x)}}$$

3.) $\underline{f(x) := |x|}$



$x > 0 \quad : \quad f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1$

siehe 1.)

$x < 0 \quad : \quad f(x) = -x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -1$

$x = 0 \quad :$ Keine eindeutige Tangente („Knick")

$\Leftrightarrow$ $f(x)$ bei $x=0$ <u>nicht</u> diff'bar.

8.2 Ableitungsregeln

Betrachte zwei diff'bare Fkt'en $f(x)$ und $g(x)$.

Dann sind auch die Fkt'en $u(x) := f(x) + g(x)$, $v(x) := f(x) \cdot g(x)$

und $w(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ (falls $g(x) \neq 0$) diff'bar, und es gilt:

(i) $u'(x) = \underline{\underline{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)}}$ (Summenregel)

(ii) $v'(x) = \underline{\underline{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}}$ (Produktregel)

(iii) $w'(x) = \underline{\underline{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) g'(x)}{(g(x))^2}}}$ (Quotientenregel, $g(x) \neq 0$)

Bew:

(i) $$u'(x) = \lim_{\tilde{x}\to x} \frac{u(\tilde{x}) - u(x)}{\tilde{x}-x} = \lim_{\tilde{x}\to x} \frac{f(\tilde{x})+g(\tilde{x}) - (f(x)+g(x))}{\tilde{x}-x}$$

$$= \lim_{\tilde{x}\to x} \left(\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{\tilde{x}-x} + \frac{g(\tilde{x})-g(x)}{\tilde{x}-x} \right) = f'(x) + g'(x)$$

(ii) $$v'(x) = \lim_{\tilde{x}\to x} \frac{f(\tilde{x})g(\tilde{x}) - f(x)g(x) + \overbrace{f(x)g(\tilde{x}) - f(x)g(\tilde{x})}^{=0}}{\tilde{x}-x}$$

$$= \lim_{\tilde{x}\to x} \left(\underbrace{\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{\tilde{x}-x}}_{\to f'(x)} \underbrace{g(\tilde{x})}_{\downarrow\, g(x)} + f(x) \underbrace{\frac{g(\tilde{x})-g(x)}{\tilde{x}-x}}_{\to g'(x)} \right)$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(iii) Zuerst:

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \lim_{\tilde{x} \to x} \frac{\frac{1}{g(\tilde{x})} - \frac{1}{g(x)}}{\tilde{x} - x}$$

$$\left.\frac{1}{g(\tilde{x})} - \frac{1}{g(x)}\right\} = \frac{g(x) - g(\tilde{x})}{g(\tilde{x})g(x)}$$

$$= \lim_{\tilde{x} \to x} \underbrace{\frac{1}{g(\tilde{x})g(x)}}_{\to \frac{1}{(g(x))^2}} \underbrace{\left(-\frac{g(\tilde{x}) - g(x)}{\tilde{x} - x}\right)}_{\to -g'(x)} = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

Jetzt: $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)\right)' \underset{(ii)}{\overset{\uparrow}{=}}$$

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \underbrace{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}_{-\frac{g'(x)}{(g(x))^2}}$$

$$= \frac{f'(x)g'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$