Grundlegende Eigenschaft

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)} \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$$

Bew: Entweder direkt: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$: nicht ganz einfach, hier weggelassen. Oder „indirekt": viel einfacher → Kap. 9.
[Seite 9.4]

Folgerungen:

- $\exp(x)\cdot\exp(-x) = \exp(0) = 1$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\exp(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}}},$$

$$\underline{\underline{\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}}}.$$

- $\underset{\uparrow \in \mathbb{N}}{\exp(n)} = \exp(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ Stück}}) = \underbrace{\exp(1)}_{=e}\cdot\underbrace{\exp(1)}_{=e}\cdots\exp(1)$ ...

$$\underline{\exp(n) = e^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\exp(-n)}} = \frac{1}{e^n} = \underline{\underline{e^{-n}}}$$

- In Kap. 7 werden wir sehen: $\exp(x) = e^x \quad \forall x \mathbb{R}$

- Für $x \geq 0$ offensichtlich:

  (i) $\exp(x) > 0$

  (ii) mit zunehmendem x nimmt auch $\exp(x)$ zu

- Für $x < 0$ folgt dasselbe aus $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

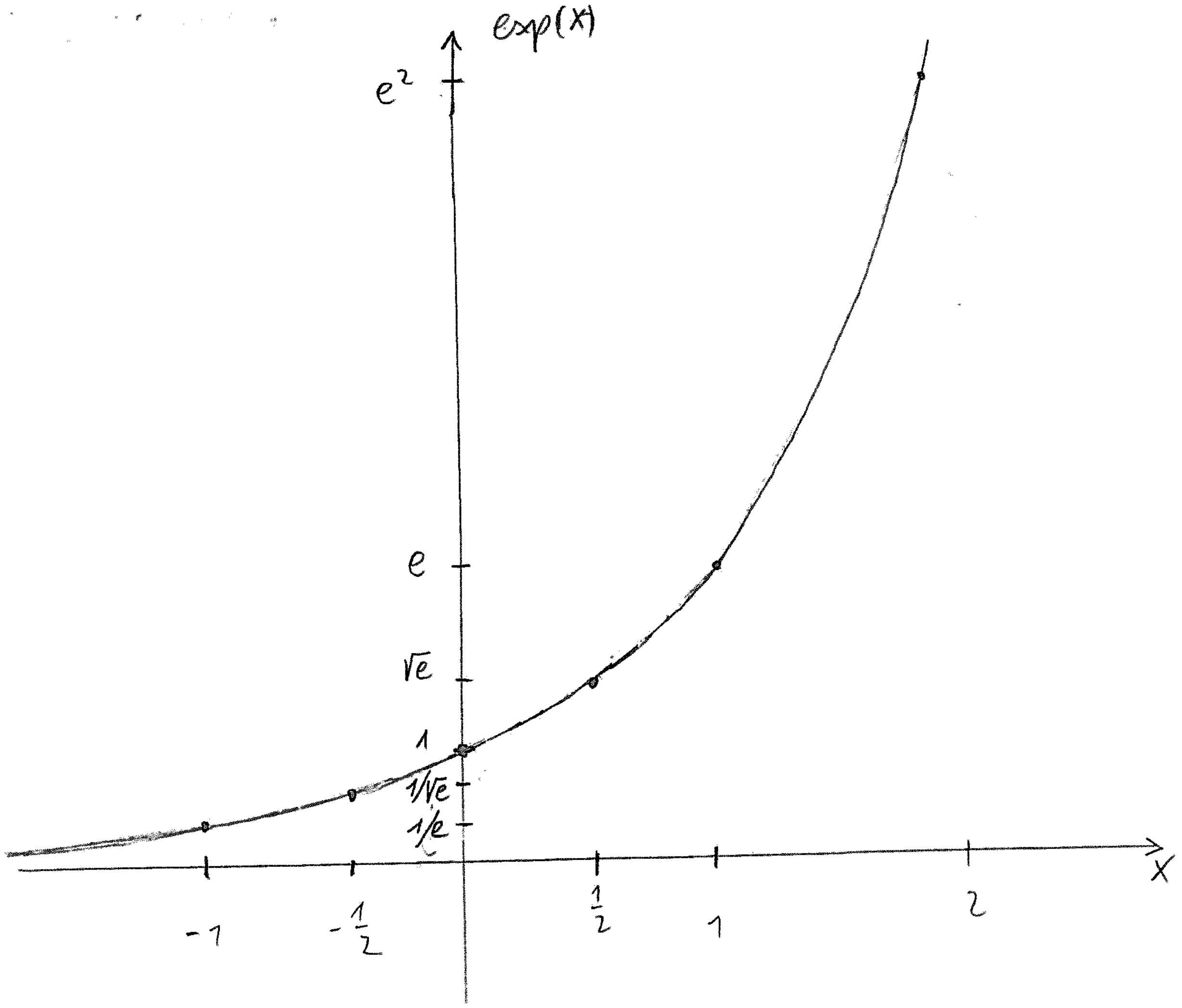
- $e^n = \exp(n) = \exp\left(\frac{n}{2} + \frac{n}{2}\right) = \exp\left(\frac{n}{2}\right)\exp\left(\frac{n}{2}\right) = \left[\exp\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2$

$\Rightarrow \exp\left(\frac{n}{2}\right) = \overset{+}{(-)}\sqrt{e^n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

ausgeschlossen wegen $\exp(x) \geq 0 \;\forall x \in \mathbb{R}$

z. B. $\exp\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} = 1{,}64\ldots$

$\Rightarrow$ genug Info um Graphen zu skizzieren:



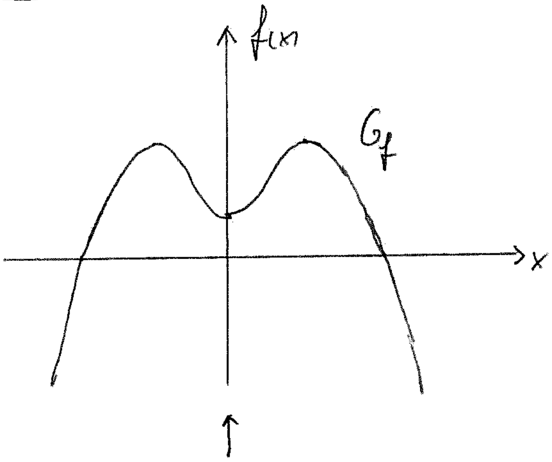
6 Funktionen (Teil 2)

6.1 Symmetrien

1.) f heisst gerade Fkt. $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{f(-x) = f(x)}}$ $\forall x$

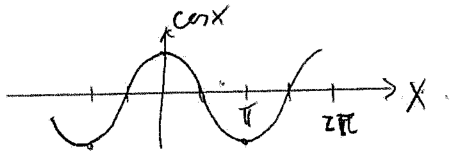
[könnte z.B. Polynom 4. Ordn. sein]

Beisp.: a)



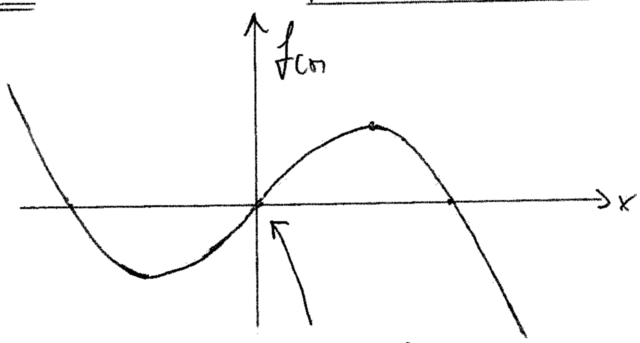
Symmetrie- bzw Spiegelgerade

b) $f(x) = \cos(x)$



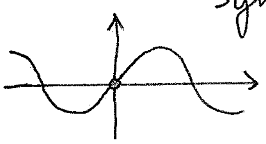
2.) f heisst ungerade Fkt. $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{f(-x) = -f(x)}}$ $\forall x$

Beisp.: a)



Symmetrie- bzw Spiegelungspkt.

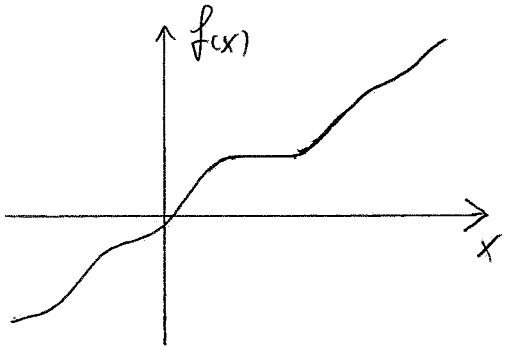
b) $\sin(x)$



Weitere Beisp.: Ü.

6.2 Monotonie

f heisst **monoton wachsend** $\Leftrightarrow$ $f(x_1) \leq f(x_2) \quad \forall\, x_1 < x_2$



und **streng monoton wachsend** $\Leftrightarrow$ $f(x_1) < f(x_2) \quad \forall\, x_1 < x_2$

Wichtigstes Beisp: $\exp(x)$.

Analog: **(streng) monoton fallend.**

Beisp.: Ü.

6.3 Umkehrfunktionen

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (oder fallend)
↳ „Definitionsbereich"

$\forall\, x \in A \Rightarrow$ falls $x_1 \neq x_2$ dann $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Def: $f(A) := \{ f(x) \mid x \in A \}$ „Wertebereich von f".

$\Rightarrow$ zu jedem $y \in f(A)$ „gehört" genau ein [≙ ein und nur ein] $x \in A$,

nämlich das x mit $f(x) = y$.

$\Leftrightarrow$ Zuordnung von x zu $f(x) = y$ ein-eindeutig,

d.h. umkehrbar:

Umkehrfkt. $f^{-1} : f(A) \to A$

$y \mapsto f^{-1}(y) =:$ dasjenige $x \in A$ mit $f(x) = y$

$\Leftrightarrow$ „Auflösen der Gl. $f(x) = y$ nach x" $\Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

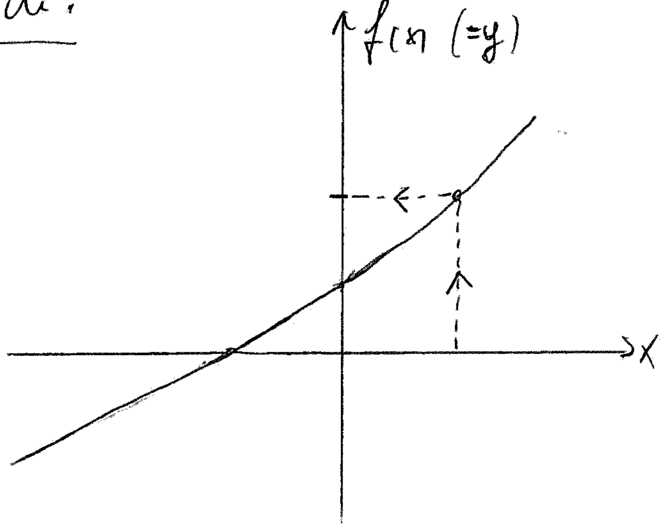
$$\Rightarrow \quad \underbrace{f^{-1}(\underbrace{f(x)}_{y})}_{f^{-1}(y) = x} = x \qquad \forall x \in A$$

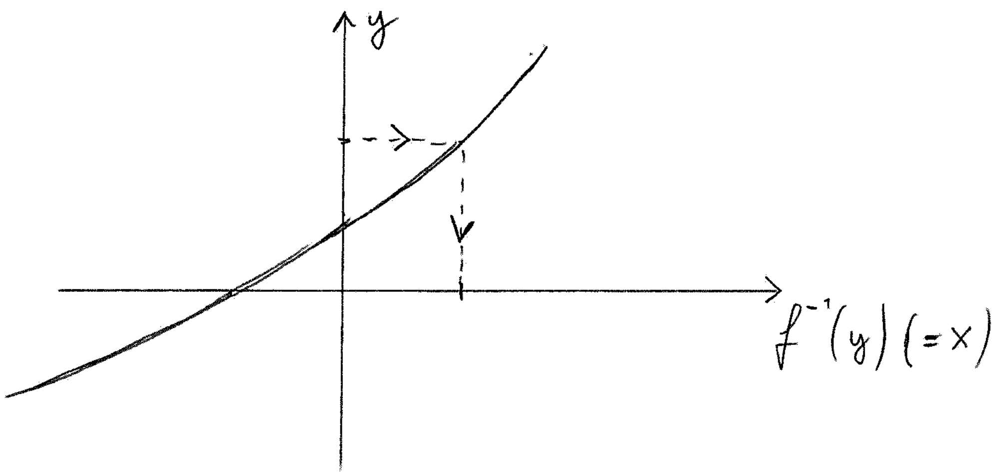
Ebenso: $$f(\underbrace{\underbrace{f^{-1}(y)}_{x}}_{f(x)=y}) = y \qquad \forall y \in f(A)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(f^{-1}(x)) = x \qquad \forall x \in f(A)$$

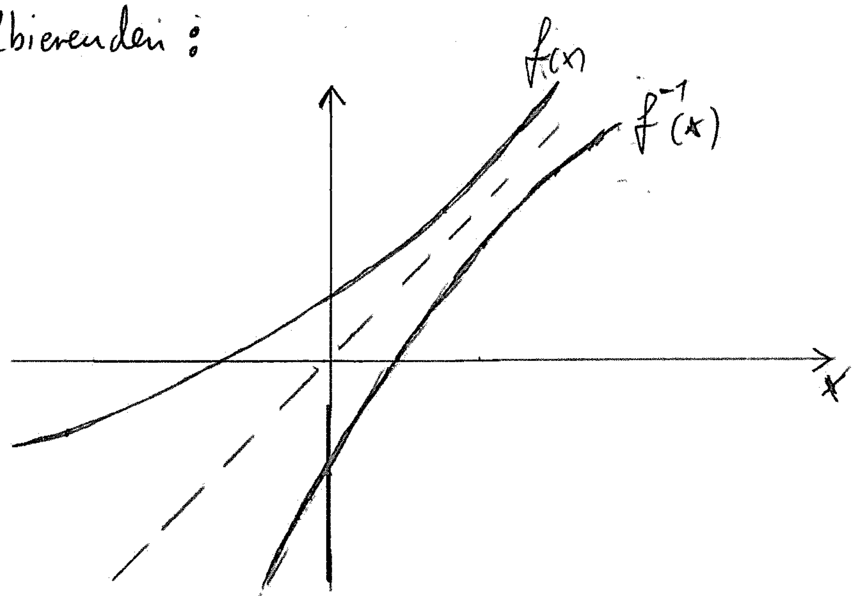
[der Name des Arguments ändert nichts an den Eigenschaften der Fkt.!]

Anschaulich:





Vertauschen von Abszisse (x-Achse) und Ordinate (y-Achse) $\Leftrightarrow$ Spiegelung an Winkelhalbierenden:



$\Rightarrow$ $f^{-1}(x)$ wieder streng monoton wachsend (oder fallend).

Beisp:

„Auflösen nach x"

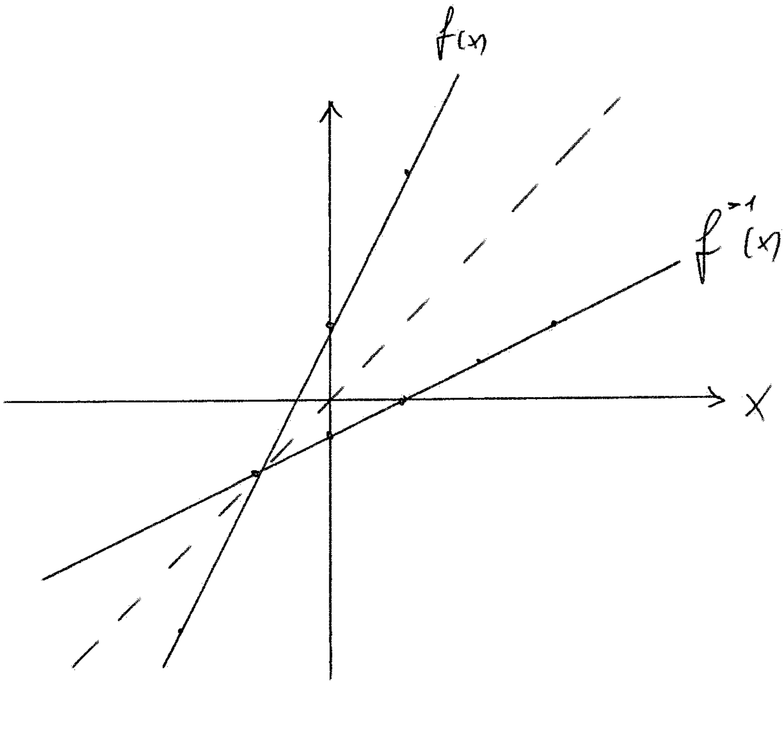
1.) $\underline{\underline{f(x) := 1 + 2x}} = y \Leftrightarrow 2x = y - 1$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y = f^{-1}(y) \Leftrightarrow \underline{\underline{f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x}}$

Probe: $f(f^{-1}(x)) = f(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x) = 1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x) = 1 - 1 + x = x$ ✓

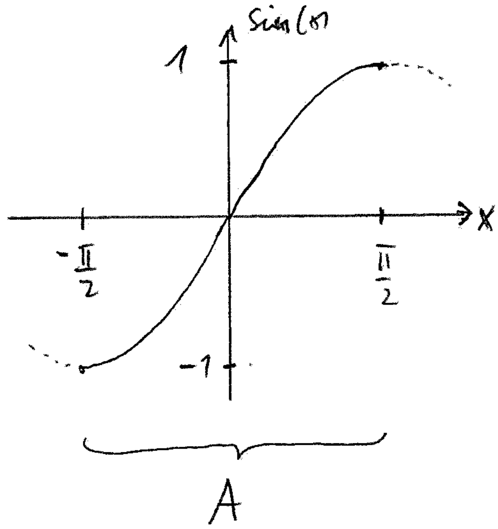
$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(1 + 2x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + 2x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + x = x$ ✓

Skizze:



2.) $f: \underbrace{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}_{A} \to \underbrace{[-1,1]}_{f(A)}$

$$x \mapsto f(x) := \sin(x)$$



[Bem: man muss sin(x) geeignet einschränken, z.B. auf $A=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

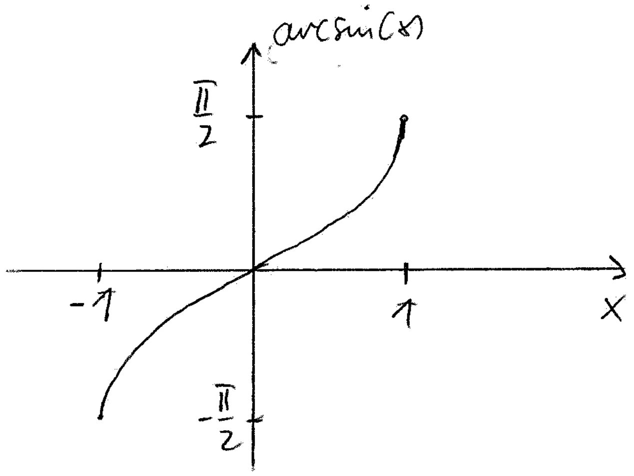
sonst nicht streng monoton $\Rightarrow$ nicht umkehrbar

(z.B. $A=\left[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$ ginge auch, aber unüblich).]

Def: $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$x \mapsto \underline{\underline{\arcsin(x) := \sin^{-1}(x)}}$$

„Arcus-Sinus".



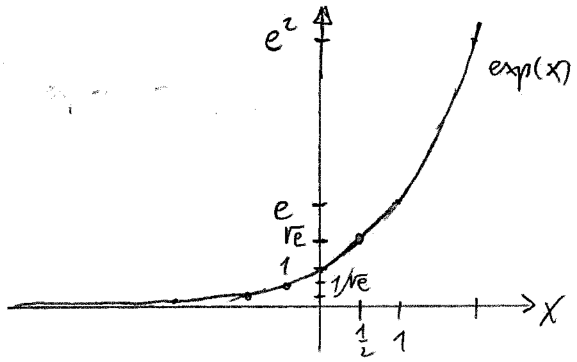
Weitere Beisp.: Ü

Wichtigstes Beisp: Kap. 7

7 Logarithmus und Potenzen

Erinnerung:

x	$\exp(x)$
0	1
1	$e \approx 2{,}71\ldots$
2	e^2
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{e} \approx 1{,}64\ldots$
-1	$1/e$
-2	$1/e^2$
$-1/2$	$1/\sqrt{e}$



$\Rightarrow$ $\exp(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und streng monoton wachsend mit

$$f(A) = \exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$$

$\Rightarrow$ Umkehrfkt $\exp^{-1}(x)$ existiert und wird „ln" genannt:

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \underline{\underline{\ln(x) := \exp^{-1}(x)}} \qquad \text{„}\underline{\text{logarithmus naturalis}}\text{"}$$

oder $\ln x$

Folgerungen:

- $\ln(\exp(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $\exp(\ln(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

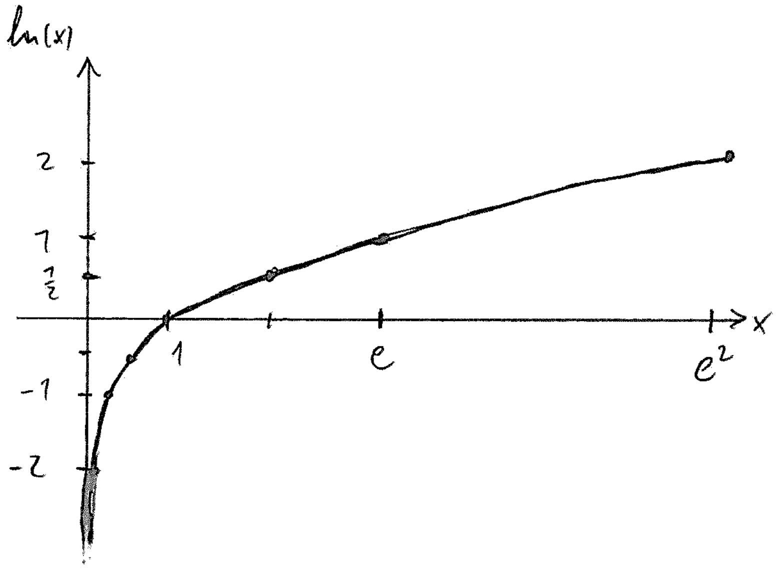
- $\boxed{\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^+$ [„Grundeigenschaft"]

Bew.: $\ln(x\cdot y) = \ln\Big(\overbrace{\exp(\underbrace{\ln x}_{=:a})}^{x} \cdot \overbrace{\exp(\underbrace{\ln y}_{=:b})}^{y}\Big)$ $\quad\Big|\quad \exp(a)\cdot\exp(b) = \exp(a+b)$

$$= \ln\big(\exp(\ln x + \ln y)\big) = \ln x + \ln y$$

- Graph:

x	$\ln(x)$
1	0
e	1
e^2	2
$\sqrt{e}$	$1/2$
$1/e$	-1
$1/e^2$	-2
$1/\sqrt{e}$	$-1/2$



Nochmals: $\ln(1) = 0$; $\ln(x)$ für $x \le 0$ existiert nicht.

Def: Sei $b \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann heisst

$$b^x := \exp(x \cdot \ln b)$$

die x-te Potenz von b (b: Basis, x: Exponent)

Folgerungen:

1.) $b^0 = \exp(0) = 1 \quad \forall\, b \in \mathbb{R}^+$

in Übereinstimmung mit früherer Def. $x^0 := 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

2.) $b^1 = \exp(\ln b) = b$ (wie gewohnt)

3.) $e^x = \exp(x \underbrace{\ln e}_{=1}) \Rightarrow \boxed{\exp(x) = e^x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

4.) $\boxed{\ln(x^y) = y \ln x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ y \in \mathbb{R}$

Bew.: $\ln(\underbrace{x^y}_{\exp(y \ln x)}) = \ln(\exp(y \ln x)) = y \ln x$