Betrachte $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ .

$$\overset{(b)}{\Rightarrow} \quad |\vec{u}| ; |\vec{v}| \neq 0$$

Defs: $\lambda := \frac{1}{|\vec{u}|^2} (\vec{u} \cdot \vec{v})$

$$\vec{v}_{\parallel} := \lambda \vec{u}$$

$$\vec{v}_{\perp} := \vec{v} - \vec{v}_{\parallel} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v}_{\parallel} = \lambda \, \vec{u} \cdot \vec{u} = \frac{1}{|\vec{u}|^2} (\vec{u} \cdot \vec{v}) \underbrace{\vec{u}^2}_{|\vec{u}|^2} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v}_{\perp} = \vec{u} ( \vec{v} - \vec{v}_{\parallel} ) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}_{\parallel}}_{\vec{u} \cdot \vec{v}} = 0$$

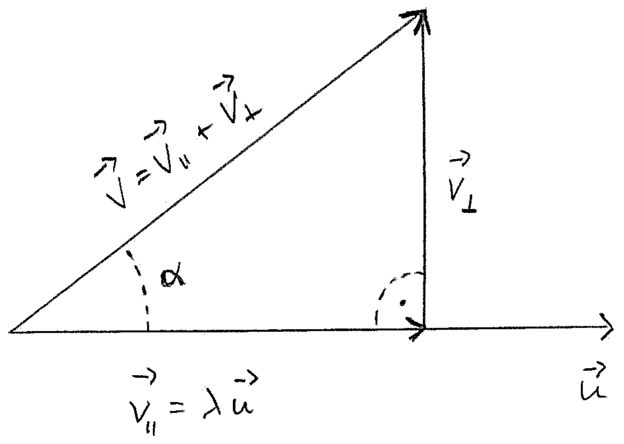
$$\vec{v}_{\parallel} \cdot \vec{v}_{\perp} = \lambda \, \vec{u} \cdot \vec{v}_{\perp} = 0$$

$$|\vec{v}|^2 = \vec{v} \circ \vec{v} = (\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}) \cdot (\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}) = \vec{v}_{\parallel}^{\,2} + \underbrace{\vec{v}_{\parallel} \cdot \vec{v}_{\perp}}_{=0} + \underbrace{\vec{v}_{\perp} \cdot \vec{v}_{\parallel}}_{=0} + \vec{v}_{\perp}^{\,2}$$

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_{\parallel}|^2 + |\vec{v}_{\perp}|^2$$

4.15

Skizze:




(für $n \geq 3$ ist dies die durch $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannte Ebene)

$\vec{v}$, $\vec{v}_{\parallel}$, $\vec{v}_{\perp}$ erfüllen Satz des Pythagoras $\Rightarrow$

$\vec{v}_{\parallel}$ und $\vec{v}_{\parallel}$ senkrecht/rechtwinklig zueinander [⊡ einzeichnen]

NICHT

[ Wenn $|\vec{v}|=1$ [$\alpha$ einzeichnen]: $|\vec{v}_{\parallel}| = \cos(\alpha)$

[Sonst]: $|\vec{v}_{\parallel}| = |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$ [$\alpha$ einzeichnen] ]

[$\alpha$ einzeichnen]

Ferner: $\cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{v}_{\parallel}|}{|\vec{v}|} \Rightarrow |\vec{v}_{\parallel}| = |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$

(falls $\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha) \geq 0$)

$\Updownarrow$

$\vec{u} \cdot \vec{v} \geq 0$

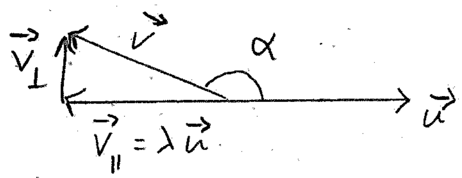
$$\Rightarrow |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha) = |\vec{u}|\cdot\underbrace{|\vec{v}_{\parallel}|}_{= |\lambda\vec{u}| = |\lambda|\,|\vec{u}|} =$$

$$\overset{\lambda \geq 0}{=} \lambda\,|\vec{u}|^2 = \underbrace{\frac{1}{|\vec{u}|^2}(\vec{u}\cdot\vec{v})}_{\lambda}\cdot|\vec{u}|^2 = \vec{u}\cdot\vec{v}$$

Def: $\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})$ := Zwischenwinkel von $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}))}$$

- Falls $\lambda < 0$ :




$\Leftrightarrow \cos\alpha < 0$

$\Rightarrow |\vec{v}_{\parallel}| = |\vec{v}|\cdot(-\cos\alpha)$

$\Updownarrow$

$\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$

$\Rightarrow$ selbe Formel

- Falls $\alpha < 0$ : $\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}) := -\alpha \quad \Rightarrow \sphericalangle(\vec{u},\vec{v}) \in [0,\pi]$ immer!

$\Rightarrow$ wieder selbe Formel (da $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$).

Folgerungen:

1.) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$ („senkrecht" oder „orthogonal").

2.) Mit $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik}$ folgt: alle $\vec{e}_k$ sind normiert und paarweise orthogonal $\Rightarrow$ $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ heisst eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.

3.) Oben:

$$\lambda := \frac{1}{|\vec{u}|^2} (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$\vec{v}_\parallel := \lambda \vec{u}$, d.h. $\vec{v}_\parallel$ ist parallel zu $\vec{u}$.

$\vec{v}_\perp := \vec{v} - \vec{v}_\parallel$ und $\vec{v}_\perp \cdot \vec{u} = 0$, d.h. $\vec{v}_\perp$ ist senkrecht zu $\vec{u}$.

$\Downarrow$

$\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$ d.h. ein bel. Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ kann so „zerlegt" werden in einen Beitrag senkrecht zu $\vec{u}$ und einen parallel zu $\vec{u}$!

4.) $$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \big|\, |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})) \,\big| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\, \overbrace{|\cos(\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}))|}^{\leq 1} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

(Cauchy-Schwarz-Ungl.)

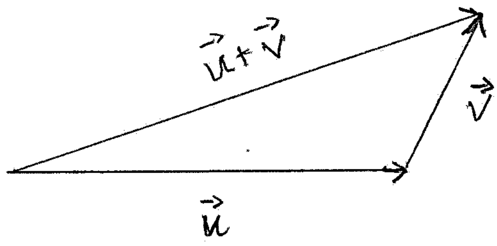
5.) $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) =$

$$= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\,\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 + \underbrace{2\,\vec{u}\cdot\vec{v}}_{\le 2|\vec{u}\cdot\vec{v}| \underset{\uparrow\, 4.)}{\le} 2|\vec{u}|\,|\vec{v}|} + |\vec{v}|^2$$

$$\le |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}|\,|\vec{v}| + |\vec{v}|^2 = \left(|\vec{u}| + |\vec{v}|\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{|\vec{u}+\vec{v}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}|}} \qquad \text{(\underline{Dreiecksungl.})}$$

Veranschaulichung:




$$|\vec{u}| + |\vec{v}| \ge |\vec{u}+\vec{v}| \quad \checkmark$$

(III) Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt)

Ist Besonderheit des $\mathbb{R}^3$. Symbol „x".

Def: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$

Alternative Schreibweise: $\vec{u} \wedge \vec{v}$

Präsenzüb: berechne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = ?$ $= \begin{pmatrix} 0-(-4) \\ -2-3 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Es folgt:

(a) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} \quad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

(b) $(\lambda \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \lambda \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \quad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3,\ \lambda \in \mathbb{R}$

(c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w} \quad \forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

(d) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$

Merkhilfe: „bac − cab"

(Konvention: $\vec{v} \cdot \lambda := \lambda \cdot \vec{v}$)

(e) $\underbrace{\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})}_{} = \vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) \quad \forall\, \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$

(sog. Spatprodukt)

Bew: Übungen

Weitere Folgerungen:

1.) $\vec{v}\times\vec{v} \underset{\overset{\uparrow}{(a)}}{=} -\vec{v}\times\vec{v} \implies \vec{v}\times\vec{v} = \vec{0} \quad \forall\, \vec{v}\in\mathbb{R}^3$

2.) $\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) \underset{\overset{\uparrow}{(e)}}{=} \vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{u}) \underset{\overset{\uparrow}{1.)}}{=} \vec{v}\cdot\vec{0} = 0$

genauso: $\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = 0$

$\implies$ $\vec{u}\times\vec{v}$ ist orthogonal zu $\vec{u}$ und zu $\vec{v}$ $\quad \forall\, \vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$

$$3.)\quad (\vec{u}\times\vec{v})^2 = \underbrace{(\vec{u}\times\vec{v})}_{=:\vec{w}}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) \underset{(e)}{=} \vec{v}\cdot\underbrace{(\vec{w}\times\vec{u})}_{*} =$$

[Nebenrechnung]

$$* \underset{(a)}{=} -\vec{u}\times\vec{w} = -\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{v}) \underset{(d)}{=} -\left(\vec{u}\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v}) - \vec{v}\cdot(\vec{u}\cdot\vec{u})\right)$$

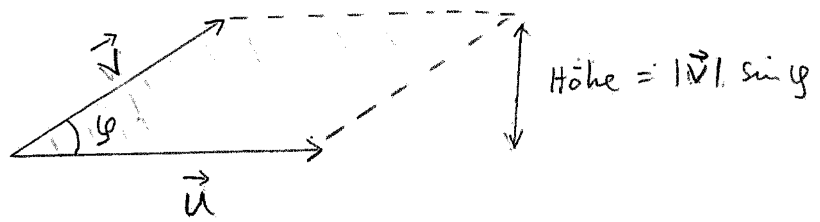
$$= -\underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{u})(\vec{u}\cdot\vec{v})} + |\vec{v}|^2|\vec{u}|^2$$

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = \left(|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\varphi)\right)^2 \qquad \varphi := \sphericalangle(\vec{u},\vec{v})$$

$$\Rightarrow\quad |\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\underbrace{\left(1-\cos^2(\varphi)\right)}_{\sin^2(\varphi)}$$

Da $\varphi\in[0,\pi]$ folgt $\sin\varphi\geq 0$ $\Rightarrow$

$$\boxed{|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\left(\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})\right)}$$

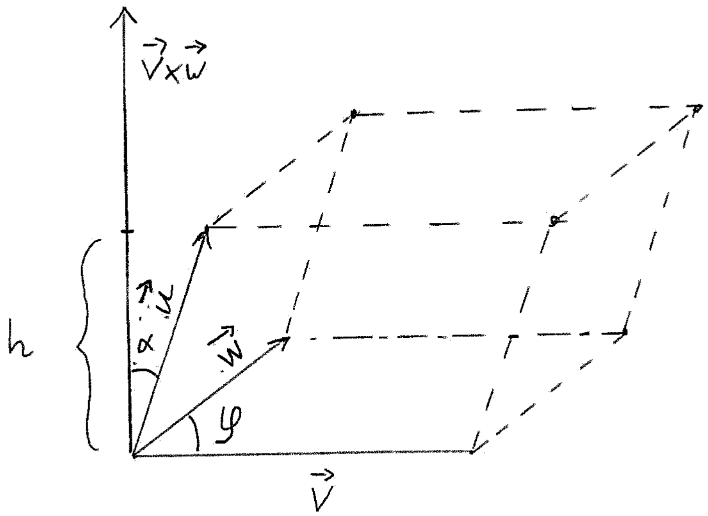



$\Rightarrow$ $|\vec{u}\times\vec{v}| \mathrel{\hat=}$ Fläche des von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms

4.) $\underline{\underline{\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \overset{}{\underset{3.)}{\Leftrightarrow}} \vec{u} \text{ und } \vec{v} \text{ kollinear}}}$ (d.h. $\vec{u} = c \cdot \vec{v}$)

$\underline{\underline{\text{oder } \vec{u} = \vec{0} \quad \text{oder } \vec{v} = \vec{0}}}$

5.)




$\varphi = \sphericalangle(\vec{v}, \vec{w})$

$\alpha = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w})$

$h = |\vec{u}| \cos(\alpha)$

$$\underset{\text{daher „Spatprodukt"}}{\underbrace{\underline{\underline{|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|}}}} = |\vec{u}| \; |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot \cos(\alpha) = \underset{\text{Höhe}}{h} \cdot \underbrace{|\vec{v} \times \vec{w}|}_{\text{Grundfläche}} =$$

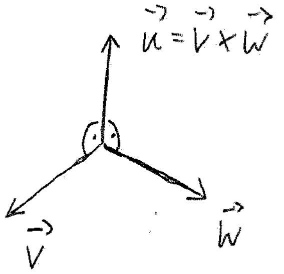
$\underline{\underline{= \text{Volumen des von } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ aufgespannten Spats bzw. Parallelepipeds}}}$

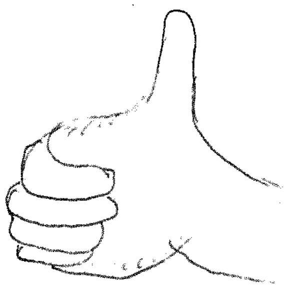
6.) Sei $\vec{u} := \vec{v} \times \vec{w} \neq \vec{0}$. Wir wissen:

- $\vec{u}$ ist senkrecht zu $\vec{v}$ und $\vec{w}$.
- Länge $|\vec{u}| = |\vec{v}|\,|\vec{w}| \sin(\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}))$.

$\Rightarrow$ es bleiben nur noch 2 Möglichkeiten („Orientierungen") für $\vec{u}$:

a)



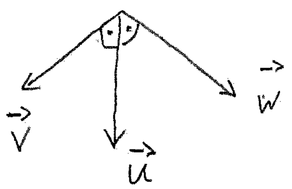



„Rechte-Hand-Regel"

d.h. die 3 Vektoren $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u} := \vec{v} \times \vec{w}$

bilden ein sog. „<u>Rechtssystem</u>"

b)




„Linkssystem".

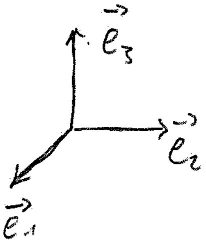
4.23

Beh: a) trifft zu

Bew:

Wähle zunächst $\vec{v} = \vec{e}_1$, $\vec{w} = \vec{e}_2$ $\Rightarrow$

$$\vec{u} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \vec{e}_3$$




Rechtssystem

[nur sagen]

Verändere jetzt Länge und Richtung von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ kontinuierlich, bis gewünschte Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ erreicht sind, und gleichzeitig so, dass $|\vec{v}|\,|\vec{w}|\,\sin(\sphericalangle(\vec{v},\vec{w}))$ niemals 0 wird (das geht!).

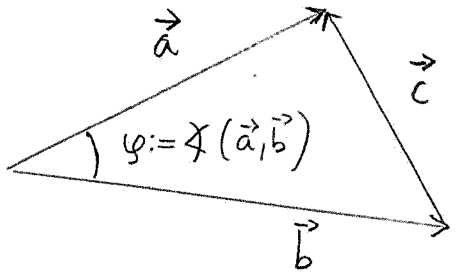
Damit ändert sich auch $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$ kontinuierlich, kann also niemals plötzlich „umklappen" oder $\vec{0}$ werden $\Rightarrow$

Rechtssystem bleibt erhalten.

q.e.d.

## Ausklang:

a)




$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{a} \iff \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

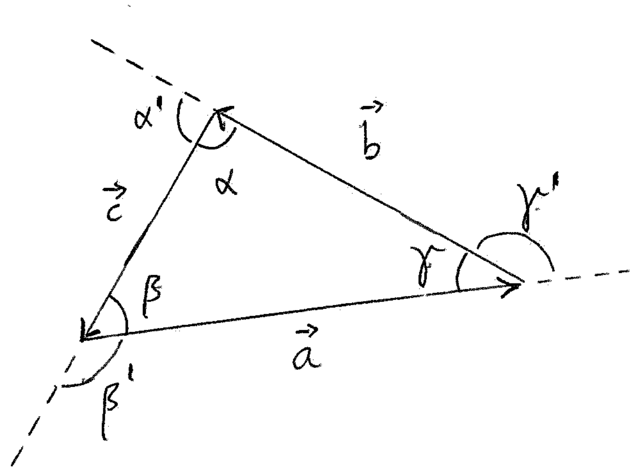
$$\Rightarrow \quad \vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} \underbrace{- \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a}}_{-2\,\vec{a}\cdot\vec{b} \,=\, -2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\varphi)} + \vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}| - 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\varphi)}} \qquad (\text{„}\underline{\text{Cosinussatz}}\text{"})$$

Spezialfall: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ($\hat{=}\ 90°$) $\Rightarrow \cos(\varphi) = 0$

$\Rightarrow$ Pythagoras.

b.)



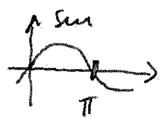

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \underbrace{(-\vec{a} - \vec{c})}_{\vec{b}} = -\underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{=\vec{0}} - \vec{a} \times \vec{c} = -\vec{a} \times \vec{c}$$

$$= \underbrace{(-\vec{b} - \vec{c})}_{\vec{a}} \times \vec{b} = -\underbrace{\vec{b} \times \vec{b}}_{=\vec{0}} - \vec{c} \times \vec{b} = -\vec{c} \times \vec{b}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\gamma') = |\vec{a} \times \vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \sin(\beta')$$

$$= |\vec{c} \times \vec{b}| = |\vec{c}|\,|\vec{b}| \sin(\alpha')$$




$\sin(\alpha') = \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ , ebenso $\beta, \gamma$

Division durch $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \Rightarrow$

$$\underline{\underline{\frac{\sin(\alpha)}{|\vec{a}|} = \frac{\sin(\beta)}{|\vec{b}|} = \frac{\sin(\gamma)}{|\vec{c}|}}} \qquad (\underline{\text{Sinussatz}})$$