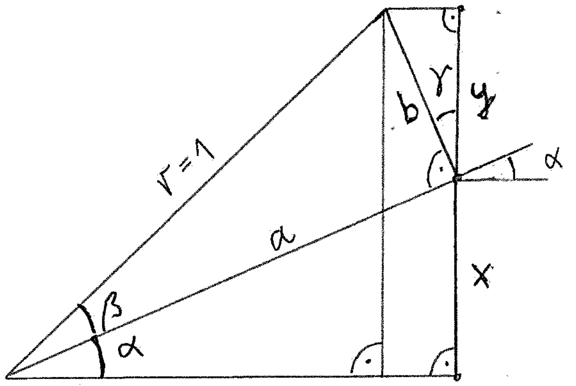
Additionstheoreme



1. $\gamma = \alpha$

2. $b = \sin\beta \quad , \quad a = \cos\beta$

3. $\frac{x}{a} = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad x = \sin(\alpha)\cdot a \overset{2.}{=} \sin(\alpha)\cos(\beta)$

4. $\frac{y}{b} = \cos\gamma \overset{1.}{=} \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad y = \cos(\alpha)\cdot b \overset{2.}{=} \cos(\alpha)\sin(\beta)$

5. $\sin(\alpha+\beta) = x + y$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin(\alpha)\underbrace{\cos(-\beta)}_{=\cos(\beta)} + \cos(\alpha)\underbrace{\sin(-\beta)}_{-\sin(\beta)}$$

$$\boxed{\sin(\alpha\pm\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)}$$

(„sico : cosi")

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\sin\left(\underbrace{\left(\alpha+\tfrac{\pi}{2}\right)+\beta}_{\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}}\right)}_{\cos(\alpha+\beta)} = \underbrace{\sin\left(\alpha+\tfrac{\pi}{2}\right)}_{\cos(\alpha)}\cos(\beta) + \underbrace{\cos\left(\alpha+\tfrac{\pi}{2}\right)}_{-\sin(\alpha)}\sin\beta$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

analog für $-\beta$ $\Rightarrow$

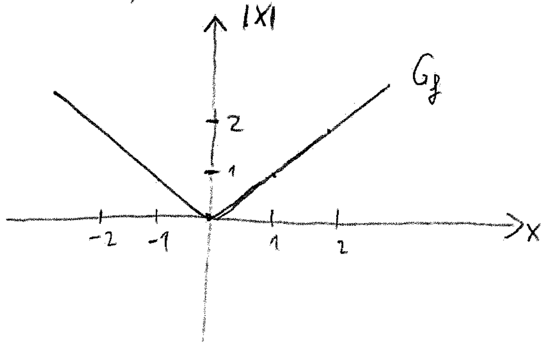
$$\boxed{\cos(\alpha\pm\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)}$$

(„coco sisi")

3.2 Die Betragsfunktion

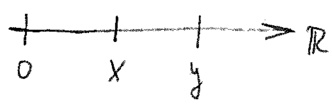
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$$

$$x \mapsto f(x) := |x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$



Folgerungen: (-> Übungen)

- $|x| > 0$ falls $x \neq 0$ und $|x| = 0$ falls $x = 0$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $|x+y| \leq |x| + |y| \quad$ —"— (sog. „Dreiecksungl.")
- $|x-y| \mathrel{\hat{=}}$ Abstand zw. x und y



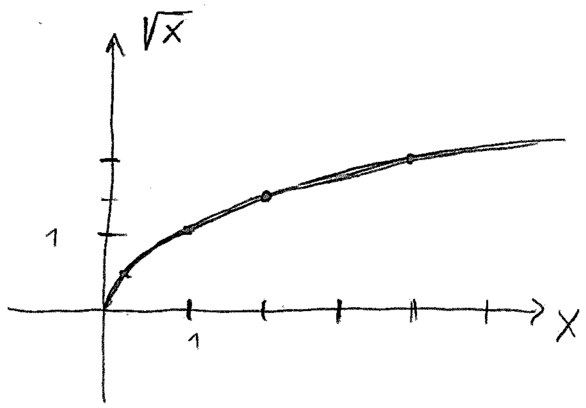
3.3 Die Wurzelfunktion

$$f : A \to \mathbb{R}_0^+$$
$$x \mapsto f(x) := \sqrt{x}$$

Nur für $x \geq 0$ „wohldefiniert" $\Rightarrow$ $A = \mathbb{R}_0^+$

Beachte $\sqrt{x} \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}_0^+$ (z.B. $\sqrt{4} = \pm 2$ ist falsch! f(x) muss eindeutig sein!)

x	$f(x)$
0	0
$\frac{1}{4}$	$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$
1	1
$2{,}25$	$1{,}5$
4	2



[wird bel. gross]

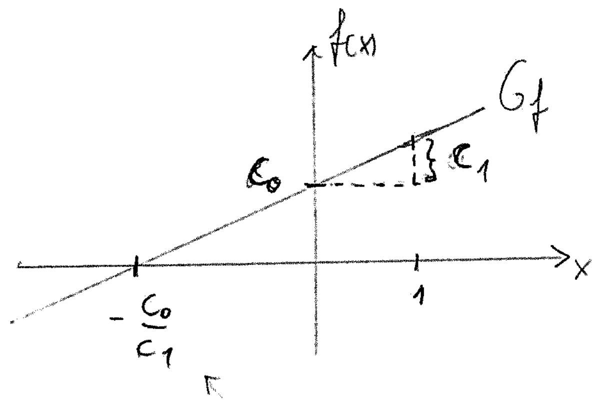
(so lässt sich $\sqrt{x}$ für viele x recht gut „schätzen"!)

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{|x| = \sqrt{x^2}}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3.4 Polynomfunktionen

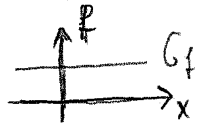
1.) $$f(x) := c_0 + c_1 x \qquad (c_{0,1} \in \mathbb{R})$$

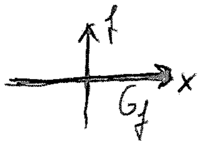
„Gerade mit Achsabschnitt c_0 und Steigung c_1" (lineare Fkt.)



NS : $f(x) = 0 = c_0 + c_1 x \iff x = -\frac{c_0}{c_1}$ (falls $c_1 \neq 0$);

$$\text{falls } c_1 = 0 \implies \begin{cases} \text{keine NS falls } c_0 \neq 0 \\ f(x) = 0 \ \forall x \text{ falls } c_0 = 0 \end{cases}$$





Was „passiert" mit G_f, wenn man c_0 oder c_1 ändert?

2.) $f(x) := c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \quad (c_{0,1,2} \in \mathbb{R},\ c_2 \neq 0)$

(quadratische Fkt.)

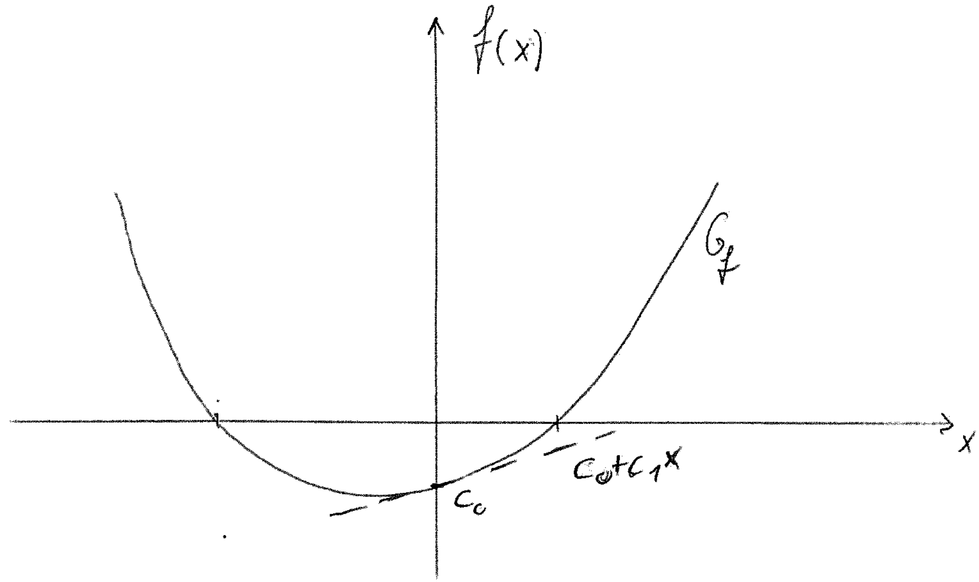
NS $\Leftrightarrow$ $f(x) = 0$ $\Leftrightarrow$ p-q-Formel ($\to$ Übungen).

„approximativ"

Verhalten für x nahe 0: $f(x) \approx c_0 + c_1 x$ (x^2 viel kleiner als x!)

Verhalten für grosse x (pos. oder neg.): $f(x) \approx c_2 x^2$

($c_0 + c_1 x$ vergleichsweise klein!)



Es kann zwei, eine, oder keine NS geben (je nach $c_{0,1,2}$).

$c_2 > 0$ $\Leftrightarrow$ „nach oben geöffnet".

Variation von $c_{0,1,2}$ $\Leftrightarrow$ „verschieben", „stauchen/strecken", „spiegeln".

[an x- oder y-Achse]

3.) $f(x) := c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 = \sum_{k=0}^{3} c_k x^k \quad (c_k \in \mathbb{R},\ c_3 \neq 0)$

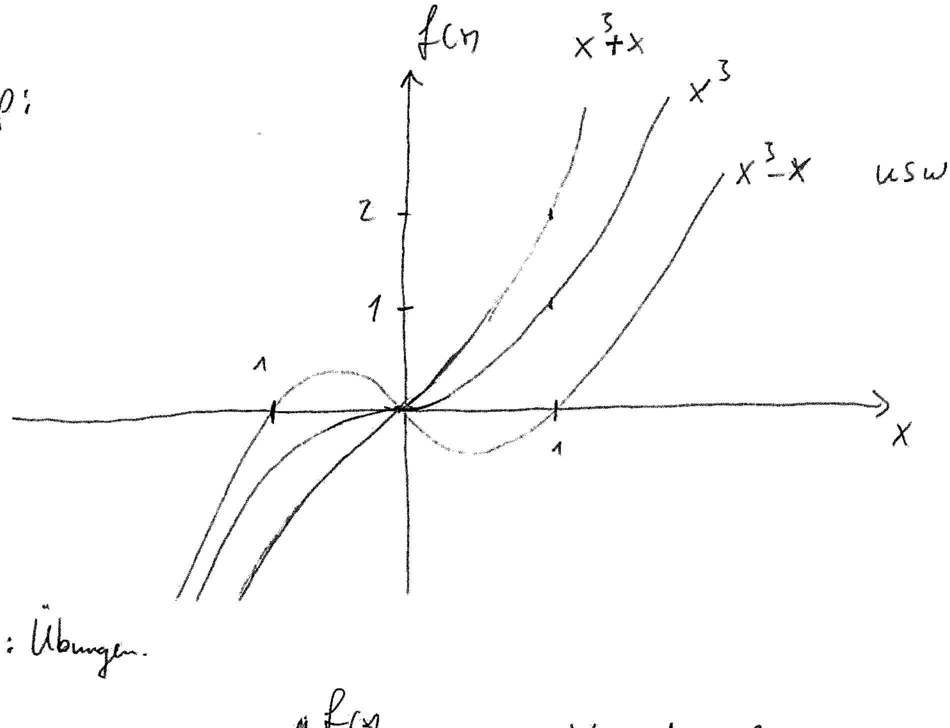
(„kubische Fkt.")

Nahe 0: $f(x) \approx c_0 + c_1 x$

Für grosse x: $f(x) \approx c_3 x^3 \Rightarrow$ es gibt mindestens eine NS.

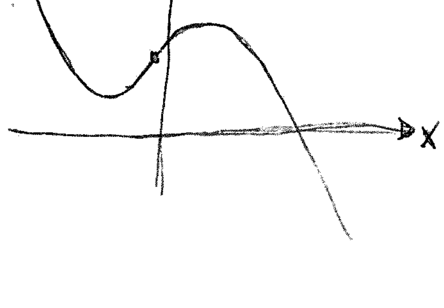
Eventuell weitere NS je nach c_k (maximal 3). Formel dafür ist sehr kompliziert (unpraktisch). Per Computer einfach mit hoher Genauigkeit berechenbar.

Beisp:



Weitere: Übungen.

Allg. Fall:



Variation der $c_k \Leftrightarrow$ „verschieben" „stauchen/strecken", „spiegeln", „verkippen" (siehe Skizze oben)...

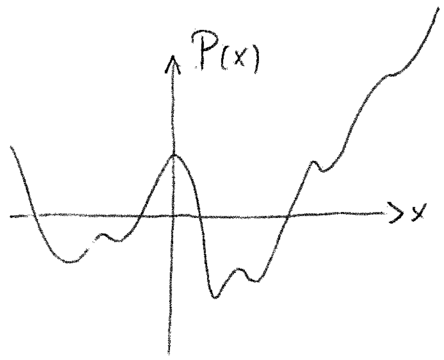
4.) $P(x) := c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \qquad (c_k \in \mathbb{R},\ c_n \neq 0)$

(„Polynom n-ter Ordng" oder „n-ten Grades")

NS: maximal n, minimal $\begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$,

[beweisbar!]

Keine allg. Formel für $n \geq 5$; numerisch einfach.



(max. $n-1$ „Richtungswechsel")

Beisp: Übungen.

[Ev. selber einige konkrete Beisp. „ausixen": es gibt viel zu entdecken!]

Ausblick: Man kann fast jede „praktisch relevante" Fkt. $f(x)$ durch Polynome approximieren und für $n \to \infty$ sogar exakt reproduzieren:

→ sog. Potenzreihen (später mehr).

3.5 Rationale Funktionen

Sind $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome, dann heisst

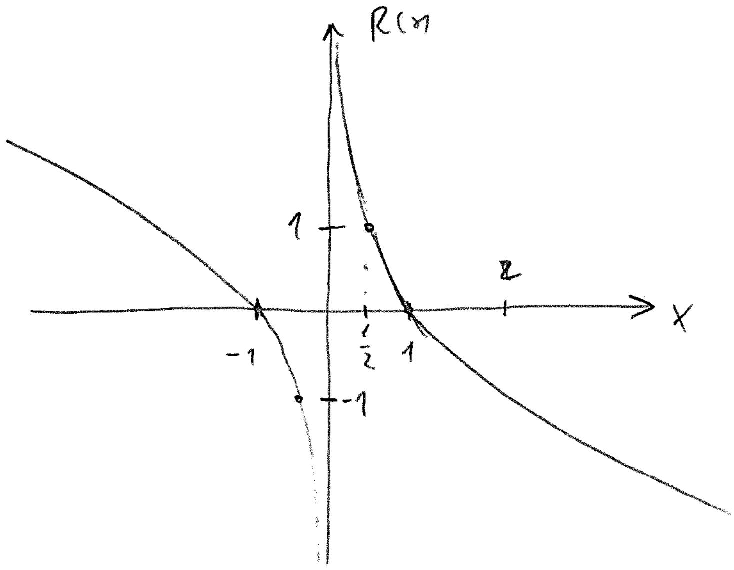
$$\underline{\underline{R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}}}$$ eine <u>(gebrochen) rationale Fkt.</u>

Beisp: $R(x) := \frac{1-x^2}{2x}$

NS : $x = \pm 1$

„Pol" (NS im Nenner) : $x = 0$, für kleine x: $R(x) \approx \frac{1}{2x}$

Für grosse x : $R(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}x \simeq -\frac{1}{2}x$



Weitere: Übungen.

<u>Im Allg.</u>: Pole bei NS von $Q(x) \Rightarrow$

Noch reichhaltiger/komplizierter als Polynome, aber nicht ganz so wichtig (in der Physik).