2.2 Das Summensymbol.

Betrachte n reelle Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Def. : $\underline{\underline{a_1 + a_2 + \dots + a_n =: \sum_{k=1}^{n} a_k}}$ (Summensymbol)

„Definition"

„k läuft von 1 bis n"

Analog : $\underline{\underline{a_m + a_{m+1} + \dots + a_n =: \sum_{k=m}^{n} a_k}}$ $(m \leq n)$

Präsenzübung :

- $a_3 = 2$, $a_4 = -1$, $a_5 = 0$, $a_6 = 0{,}6$ $\Rightarrow \sum_{k=3}^{6} a_k = ?$ $= 2 - 1 + 0{,}6 = 1{,}6$
- $b_m = m^2 \Rightarrow \sum_{m=1}^{4} b_m = ?$ $= \sum_{m=1}^{4} m^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$
- $x_\ell = \frac{1}{\ell} \Rightarrow \sum_{i=3}^{5} x_i = ?$ $= \sum_{i=3}^{5} \frac{1}{i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \dots = \frac{47}{60}$

„Bemerkung(en)"

Bem.:

- Für $m=n$: $\sum_{k=n}^{n} a_k = a_n$

- Für $m>n$: $\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$ (leere Summe)

- Trivial, aber oft verwirrend:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{\nu_0=m}^{n} a_{\nu_0} = \dots$$

(Bezeichnung des Summationsindex spielt für Wert der Summe keine Rolle!)

Insbes. sog. Indexverschiebung:

Beisp: $\sum_{m=1}^{4} m^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \sum_{m=0}^{3} (m+1)^2$

Allg.: $\underline{\underline{\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m+l}^{n+l} a_{j-l}}}$ für bel. $l \in \mathbb{Z}$

„Allgemein"

„Substitution" $j := k+l$

$\Leftrightarrow k = j-l$

„beliebig"

Wichtigstes Beisp.:

Betrachte $a_k := x^k = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{k \text{ Stück}}$ $\quad (x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N})$

Def.: $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k = \underbrace{x^0}_{:=1} + \underbrace{x^1}_{=x} + x^2 + \ldots + x^n$

Präsenzüb.: Verifiziere $x s_n - s_n = x^{n+1} - 1$

Lösung: $= x(1 + x + x^2 + \ldots + x^n) - (1 + x + x^2 + \ldots + x^n)$

$= x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n+1} - 1 - x - x^2 - \ldots - x^n$ (Teleskopsumme)

usw, nur x^{n+1} und 1 „ohne Partner"

$= x^{n+1} - 1$

$\Rightarrow (x-1) s_n = x^{n+1} - 1 \quad \Rightarrow s_n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ (falls $x \neq 1$)

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}}$$ (sog. geometrische Summe) ($x \neq 1$)

Bem: für $x = 1$ ist $s_n = n + 1$

3. Funktionen

Eine Funktion ist eine Vorschrift, die jeder Zahl x („Argument der Fkt.") eine Zahl $f(x)$ („Funktionswert") zuordnet. [Verallg.: später!]

Schreibweise: $f: A \to \mathbb{B}$

$$x \mapsto f(x)$$

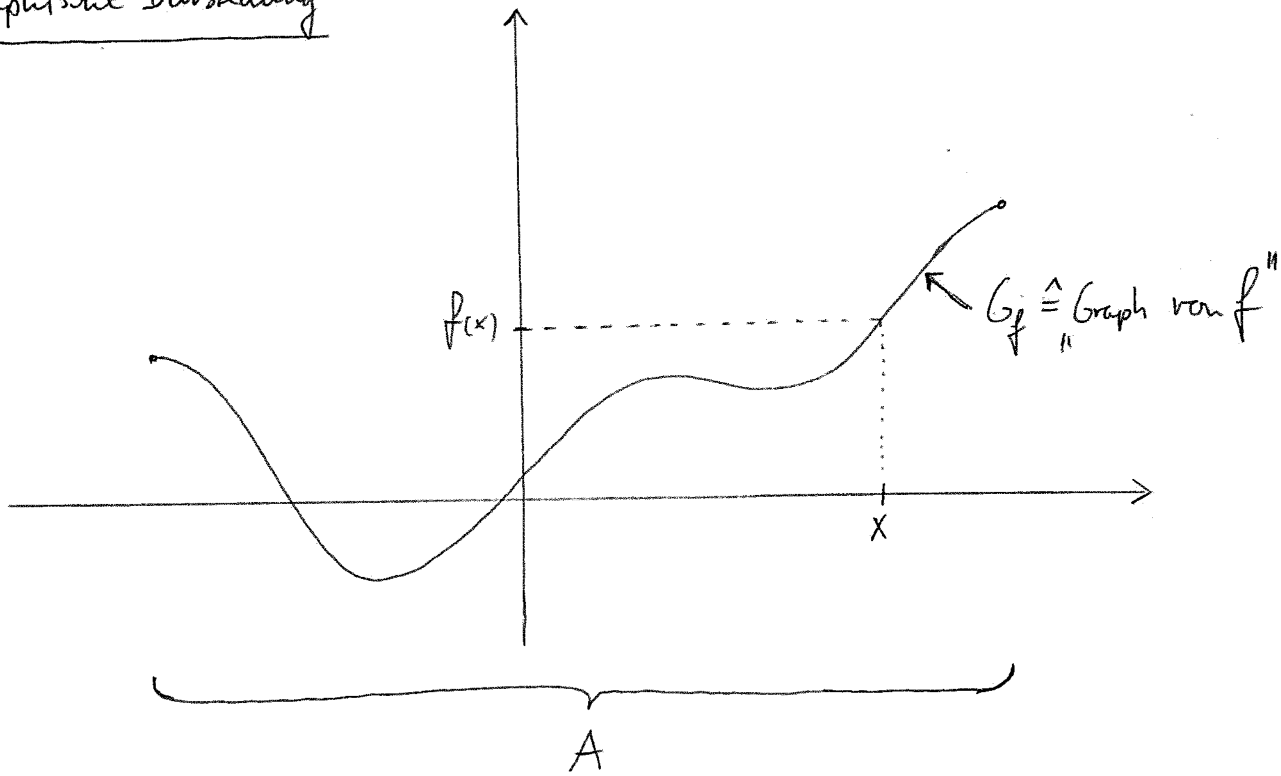
$A \mathrel{\hat{=}}$ Menge aller möglicher x-Werte (meist $\mathbb{R}$ oder ein Teil davon), sog. Definitionsbereich (von f).

$\mathbb{B}$ muss (mindestens) alle möglichen $f(x)$-Werte enthalten $\Rightarrow$ meist $\mathbb{B} = \mathbb{R}$.

Kurzschreibweisen: $f: A \to \mathbb{B}$ oder $f(x)$ oder f.

Statt "f" und "x" auch bel. andere Symbole: $g(x)$, $f(y)$, $h(z)$, $\omega(q)$, $\Lambda(\beta)$, $x(f)$, ...

Graphische Darstellung



Meist kann man nur einen Teil von G_f zeichnen, z.B. wenn $A = \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ den „interessantesten" Bereich muss man selber finden!

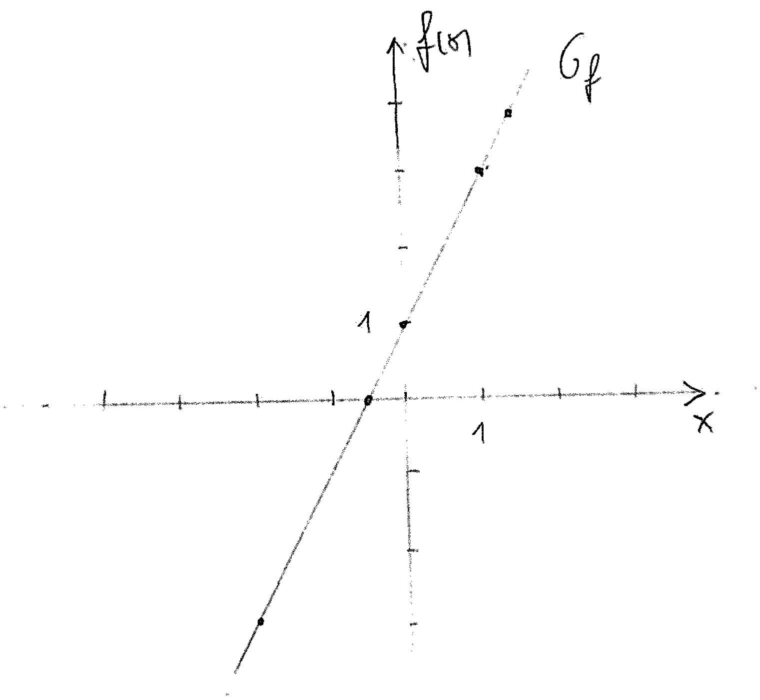
Beisp:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := 1 + 2x.$

Kurz: $f(x) := 1+2x$

Wertetabelle:

x	$f(x)$
0	1
1	3
1,5	4
−0,5	0
−2	−3



(man muss so viele x-Werte nehmen, bis das Aussehen von G_f „klar" ist)

[viele weitere Beisp: später!]

Ganz allg. gilt: [siehe Beisp. S. 3.2]

- Lösungen der Gl. $f(x) = 0$ $\Leftrightarrow$ Nullstellen (NS) von G_f

- Lösungen der Ungl. $f(x) > 0$ $\Leftrightarrow$ „wo liegt G_f über x-Achse?"

$\uparrow$ „algebraisches Problem"

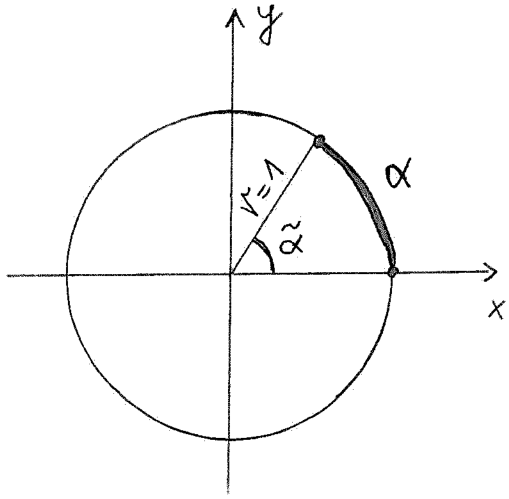
$\uparrow$ „geometrische Lösung"

$\uparrow$

Näherungslösung: „Ausprobieren" vieler x-Werte, z.B. per Computer.

3.1 Trigonometrische Funktionen

Betrachte „Einheitskreis":



$\tilde{\alpha}$ $\hat{=}$ Winkel im Gradmass

α $\hat{=}$ Winkel im Bogenmass := Länge des Kreisbogens (Radius $r=1$)

„entspricht"

Voller Kreis : $\tilde{\alpha} = 360°$ $\hat{=}$ $\alpha = 2\pi$

Halbkreis : $\tilde{\alpha} = 180°$ $\hat{=}$ $\alpha = \pi$

Rechter Winkel: $\tilde{\alpha} = 90°$ $\hat{=}$ $\alpha = \pi/2$

usw

$\Rightarrow$ Umrechnung $\alpha = \frac{\pi}{180°}\,\tilde{\alpha}$

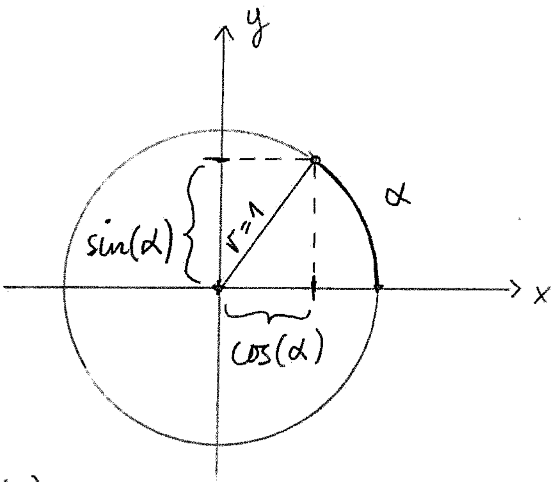
PÜ: Welchen Gradmass $\tilde{\alpha}$ entspricht das Bogenmass $\alpha = 1$?

$$\tilde{\alpha} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha = \frac{180^\circ}{3{,}14\ldots} \cdot 1 \simeq 57{,}3^\circ$$

Ab jetzt benutzen wir Bogenmass, zeichnen aber so $\measuredangle \alpha$!

Taschenrechner benutzen oft Gradmass!

Geometrische Def. von Sinus und Cosinus im Einheitskreis:



[Definition!]

Abk.: $\sin\alpha := \sin(\alpha)$, $\cos\alpha := \cos(\alpha)$

⇒ Spezielle Werte:

$\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\hookrightarrow 90°$

$\sin(\pi) = 0$, $\cos(\pi) = -1$

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$, $\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$

$\sin(2\pi) = 0$, $\cos(2\pi) = 1$

$\Rightarrow$ Ganz allg für jedes α:

- $\underline{\sin(2\pi + \alpha) = \sin(\alpha)}$, $\underline{\cos(2\pi+\alpha) = \cos(\alpha)}$

  („2π-periodische Fkt'en", $\alpha \in \mathbb{R}$ bel.)

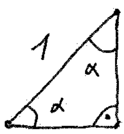
- $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$, $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\alpha)$

  $\Rightarrow \sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$

- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

- $\underline{\underbrace{\sin^2(\alpha)}_{=: [\sin(\alpha)]^2} + \cos^2(\alpha) = 1}$ (Pythagoras)

$\Rightarrow$ für $\alpha = \frac{\pi}{4} \mathrel{\hat{=}} 45^\circ$:



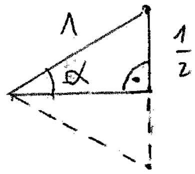
$\sin(\alpha) = \cos(\alpha)$

$\Rightarrow 2\sin^2(\alpha) = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\underline{\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71\ldots$

analog für $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $\pi + \frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4}$, ...

$\alpha = \frac{\pi}{6} \hat{=} 30^\circ$:



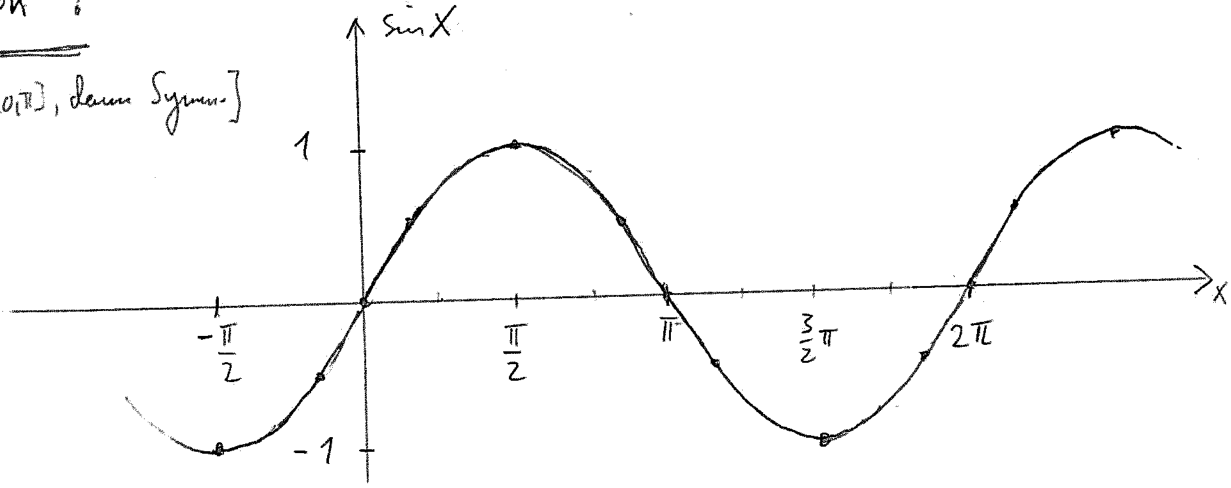
[alle Winkel 60°!]

$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$

analog: $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ Graph:

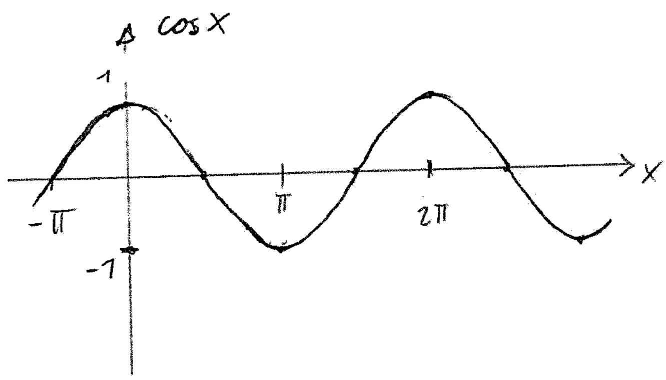
[erst [0,π], dann Symm.]

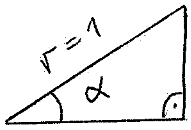


[Vorstellung: kreisender Pkt.]

(so kann man sin(x) ohne zu rechnen „schätzen")

$\cos(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

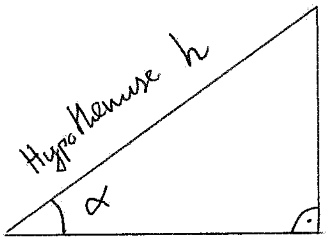




$\sin\alpha$

$\cos\alpha$

multipliziere alles mit bel. Faktor $h \in \mathbb{R}^+$:



Gegenkathete $g = h \cdot \sin\alpha$

Ankathete $a = h \cdot \cos\alpha$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\tan(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$ (Tangens)

$$\Rightarrow \quad \tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$