# Vorkurs (SoSe 2026)

P. Reimann

Organisatorisches → www.physik.uni-bielefeld.de/~reimann/VK24.html

[nicht immer zuverlässig erreichbar → screenshot machen]

Wichtigstes Ziel: Sie selber sollen aktiv werden! [Nicht nur „konsumieren"]

⇒ • Vorlesungs-Mitschrift [Papier schlägt Bildschirm].

• Präsenz-Übungen [wichtigster Teil der Vorl.!]

• Tägliche Nacharbeiten.

[Wird anstrengend, aber zahlt sich aus.]

# 1. Einleitung

Mathematik ist wichtigstes Handwerkzeug in der Physik:

[physikalische Gesetze und Vorgänge lassen sich quantitativ nur mit mathematischen Mitteln formulieren, untersuchen und verstehen („Sprache der Physik").]

Aber: ganz andere Herangehensweise als in der Mathematik selber

[weniger streng, anwendungsorientiert].

## Ziele:

- Reaktivierung des Vorwissens.
- Vorbereitung auf Physik- und Mathematikvorlesungen.
- Nochmals: Sie selber sollen aktiv werden.

[„Mikro-Forschung", „Denk-Art" lernen]

## Probleme:

- Vorkenntnisse sehr verschieden.
- Wenig Zeit.

**Inhalt:** lassen Sie sich überraschen.

Vieles kommt in anderen Vorlesungen nochmals „gründlicher".

# 2. Grundlagen

## 2.1 Mengen und Zahlen

Eine Menge wird definiert entweder durch Aufzählen ihrer Elemente oder durch Angabe der Eigenschaften ihrer Elemente.

Beisp:

„Definition" („Festsetzung", „was bedeutet das (neue) Symbol A?")

- $A := \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ („Ziffern")

Menge A — u.s.w. (hoffentlich klar!)

u.s.w. bis unendlich; hoffentlich klar, obwohl vollst. Aufzählung unmögl.!

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ (natürliche Zahlen)

traditionelles Symbol

- $\underline{\underline{\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}}}$ (natürl. Zahlen inkl. Null)

- $\underline{\underline{\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}}}$ (ganze Zahlen)

äquivalent:

$$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

↑ Abk. für „1 und/oder -1"

$$\mathbb{Z} := \{ n \mid n \in \mathbb{N}_0 \text{ oder } -n \in \mathbb{N} \}$$

↑ „Zusatzbedingungen an n"

$\underline{\underline{a \in A}}$ bedeutet: a ist Element der Menge A.

$\underline{\underline{a \notin A}}$ —"— : a ist <u>nicht</u> —"— .

z.B. $0 \in \mathbb{Z}$, $0 \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ usw.

- $G := \{ n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \text{ gerade} \}$ („gerade Zahlen")

Präsenzübung: erfinde äquivalente Definitionen für $G$.

Lösung: z. B.

$$G := \{ m \in \mathbb{Z} \mid m \text{ gerade} \}$$

$$G := \{ n \in \mathbb{Z} \mid n = 2m, \, m \in \mathbb{Z} \}$$

$$G := \{ x \in \mathbb{Z} \mid x/2 \in \mathbb{Z} \}$$

$$G := \{ 2\beta \mid \beta \in \mathbb{Z} \}$$

$$G := \{ 0, \pm 2, \pm 4, \dots \}$$

• $\underline{\underline{\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}}}$ (rationale Zahlen)

• $\underline{\underline{\mathbb{R} := \{ x \mid x \text{ kann als Dezimalzahl geschrieben werden}^{*} \}}}$

*mit endl. oder unendl. vielen Nachkommastellen.

(reelle Zahlen $\hat{=}$ Zahlengerade $\xrightarrow{\qquad\qquad}_{\mathbb{R}}$ )

„entspricht", „äquivalent zu"

z.B. $\underbrace{\frac{5}{7} \in \mathbb{Q},\ \frac{5}{7} \in \mathbb{R}}_{\frac{5}{7} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}}$, $\frac{5}{7} \notin \mathbb{Z}$,

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (ohne Bew.), $\underbrace{\underbrace{\sqrt{2} \in \mathbb{R},\ -\sqrt{2} \in \mathbb{R}}_{\sqrt{2},\, -\sqrt{2} \in \mathbb{R}}}_{\pm\sqrt{2} \in \mathbb{R}}$

<u>$\mathbb{R}$ ist der wichtigste Zahlenbereich für die Physik</u>

(später noch: komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ )

- $\emptyset := \{\}$ (leere Menge)

- $L := \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0 \}$

$\hat{=}$ Lösungsmenge der Gl. $x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$ oder $x = -1$

↑
„Äquivalenz-Zeichen

$\Rightarrow \quad L = \{1, -1\} = \{\pm 1\}$

↑
Implikation / Folgerung

Präsenzübung:

Bestimme analog $\mathbb{B} := \{ x \in \mathbb{R} \mid x^5 + 4x = 4x^3 \}$

Lösung: $\Leftrightarrow \quad x^5 + 4x - 4x^3 = 0 = x\underbrace{(x^4 - 4x^2 + 4)}_{(x^2-2)^2 \text{ (sollte man wissen!)}}$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ oder $\underbrace{x^2 - 2 = 0}$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ oder $x = -\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad \mathbb{B} = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\} = \{0, \pm\sqrt{2}\}$

Mehr dazu: Schmidt-Rubart Kap. 1.1

Aber: $\mathbb{R}$ ist mehr als nur eine Menge, nämlich:

(I) Mit den Zahlen aus $\mathbb{R}$ kann man rechnen „wie gewohnt"

(analog für $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, aber $\mathbb{R}$ ist eben am wichtigsten!)

Beisp: Präsenzübungen

- $\frac{3}{5} + \frac{2}{6} = ?$ $\qquad = \frac{18}{30} + \frac{10}{30} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$

- $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} = ?$ $\qquad = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$
- $x : \frac{x}{y} = ?$ $\qquad = \frac{x}{\frac{x}{y}} = \frac{xy}{x} = y$

Eventuelle Lücken im „<u>Bruchrechnen</u>" muss man umgehend selbst schliessen!

$\Leftrightarrow$ die 4 Grundrechenarten „funktionieren" nach den gewohnten Regeln: z.B.:

$$a+b = b+a \quad \underbrace{\forall\, a,b \in \mathbb{R}}$$

„für alle a und b aus $\mathbb{R}$"

$$a(b+c) = ab+ac \quad \forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$$

usw.

$\Leftrightarrow$ die Menge $\mathbb{R}$ ist zusätzlich mit einer sog. <u>algebraischen Struktur</u> „ausgestattet".

(II) Für zwei beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt immer genau eine ($\hat{=}$ „eine und nur eine") der drei <u>Ordnungsrelationen</u>

$$a < b \quad , \quad a = b \quad , \quad a > b$$

„kleiner" „gleich" „grösser"

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}$ ist zusätzlich mit einer <u>Ordnungsstruktur</u> ausgestattet.

Ferner: $a \leq b$ $\hat{=}$ kleiner oder gleich

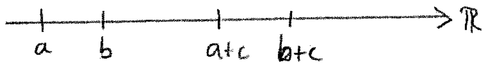
$a \geq b$ analog

„Rechenregeln" sollten wieder bekannt sein (Lücken selbst schliessen).

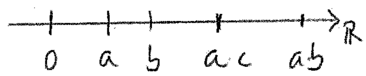
Z. B.:

- falls $a < b$ dann $a+c < b+c$ für alle $c \in \mathbb{R}$

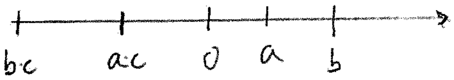
  kurz: $a < b \Rightarrow a+c < b+c \quad \forall c \in \mathbb{R}$




- $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \quad \forall\, c > 0$,



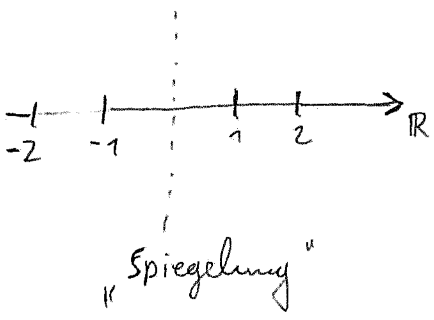

  $a \cdot c > b \cdot c \quad \forall\, c < 0$.




[ Beisp.: $1 < 2$, $c = -1 \Rightarrow$

$-1 \cdot (-1) = -1 > -2 = 2 \cdot (-1)$ ]

[ Anschaulich:

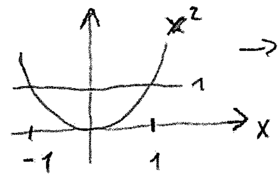


]

Präsenzübung / Hausaufgabe

Bestimme $L := \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 0 \}$.

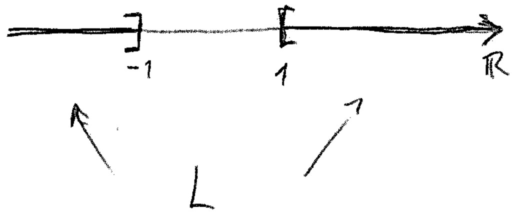
$\hat{=}$ Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 - 1 \geq 0$




→ Kap. 3!

$\Leftrightarrow \quad x^2 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1$ oder $x \leq -1$

$\Rightarrow \quad L = \{ x \mid x \geq 1 \text{ oder } x \leq -1 \}$




Siehe auch: Schmidt-Reibert Kap. 1.2

~

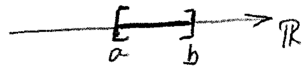
$\Rightarrow$ weitere „Standardmengen":

- $\underline{\underline{\mathbb{R}^+}} := \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$


- $\underline{\underline{\mathbb{R}_0^+}} := \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$
- $\underline{\underline{\mathbb{R}^-, \mathbb{R}_0^-}}$ analog

Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann heisst:

- $\underline{\underline{[a, b]}} := \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$ abgeschlossenes Intervall




- $\underline{\underline{(a, b)}} := \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$ offenes —"—
- analog $[a, b)$, $(a, b]$ [„halboffen"] ...
- $\underline{\underline{[a, \infty)}} := \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \}$

„unendlich"