

RECHENMETHODEN DER PHYSIK 2

SoSe 2026

Übungsblatt 14

<http://www.physik.uni-bielefeld.de/~reimann/RdP2.html>

Schriftlich abzugeben sind: 46a,b, 47a, 48

Aufgabe 46

Dies ist die Fortsetzung von Aufgabe 45: Betrachten Sie Kugelkoordinaten r, ϑ, φ .

- Bestimmen Sie* die Divergenz eines beliebigen Vektorfeldes $\vec{f} = f_r \vec{e}_r + f_\vartheta \vec{e}_\vartheta + f_\varphi \vec{e}_\varphi$ (Argumente (r, ϑ, φ) weggelassen).
- Bestimmen Sie* den Laplace-Operator gemäss $\Delta \Phi := \text{div}(\text{grad } \Phi)$ für ein Skalarfeld $\Phi = \Phi(r, \vartheta, \varphi)$.
- Bestimmen Sie* die Rotation eines beliebigen Vektorfeldes $\vec{f}$ wie in a).

* Das Endergebnis steht in der am 8. Juli verteilten Tabelle, gibt aber alleine noch keine Punkte!

Aufgabe 47

- Das Vektorfeld $\vec{f}$ verschwinde auf dem Rand des Volumens V . Berechnen Sie $\int_V dV \text{div} \vec{f}$.
- Beweisen Sie den sog. *greenschen Integralsatz*:
$$\int_V dV (\phi(\vec{x}) \Delta \psi(\vec{x}) - \psi(\vec{x}) \Delta \phi(\vec{x})) = \iint_{\partial V} d\vec{A} \cdot (\phi(\vec{x}) \text{grad } \psi(\vec{x}) - \psi(\vec{x}) \text{grad } \phi(\vec{x}))$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 41c und den Satz von Gauß.

Aufgabe 48

Berechnen Sie $\int_V d^3x (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^q$ für beliebige $q \in \mathbb{R}$ wenn V eine Kugel mit Mittelpunkt $\vec{0}$ und Radius R ist. **Hinweis:** Transformation auf Kugelkoordinaten.

Aufgabe 49

Betrachten Sie ein beliebiges, orthogonales, rechtshändiges Koordinatensystem im $\mathbb{R}^3$.

- Wie muss man den Vektoroperator $\vec{\nabla}$ definieren, damit $\vec{\nabla} \Phi(\vec{u}) = \text{grad } \Phi(\vec{u})$ für beliebige Skalarfelder?
- Wie muss man den Vektoroperator $\vec{\nabla}$ definieren, damit $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{u}) = \text{div} \vec{f}(\vec{u})$ für beliebige Vektorfelder?
- Wie muss man den Vektoroperator $\vec{\nabla}$ definieren, damit $\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{u}) = \text{rot} \vec{f}(\vec{u})$ für beliebige Vektorfelder?
- Wann lässt sich also ein sinnvoller Nabla-Operator definieren?