Rechenmethoden der Physik 2

SoSe 2026 Übungsblatt 8

http://www.physik.uni-bielefeld.de/~reimann/RdP2.html

Schriftlich abzugeben sind: 26a, 27a,b, 28a,b

Aufgabe 26

Betrachten Sie den dreidimensionalen „Rotationskörper“, der dadurch entsteht, dass man den Graphen G_f einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ „um die x-Achse rotieren lässt“.

a) Drücken Sie das Volumen des Körpers mittels eines geeigneten Integrals über $f(x)$ aus.

b) Berechnen Sie damit das Volumen einer Kugel mit Radius R.

Aufgabe 27

Wir betrachten eine Fäche $\vec{r} : \mathbb{R}^2 \supset T \to B \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{u} \mapsto \vec{r}(\vec{u})$ der speziellen Form $\vec{r}(\vec{u}) = \vec{e}_1 u_1 + \vec{e}_2 u_2 + \vec{e}_3\, f(u_1, u_2)$ mit einem Skalarfeld $f(x_1, x_2)$. Das Flächenstück $B := \{\vec{r}(\vec{u}) \,|\, \vec{u} \in T\}$ kann somit auch als Graph der Funktion $f(\vec{x})$ oder als Lösungsmenge der Gleichung $x_3 = f(x_1, x_2)$ betrachtet werden. (Spezielle Beispiele dafür finden sich in Aufgabe 26 aus RdP1 (bzw. 14 in den Übungen zu RdP1 im Sommersemester). Hier soll nun aber $f(x_1, x_2)$ beliebig sein.)

a) Bestimmen Sie $\frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_2}$ und $\left| \frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_2} \right|$

b) Überlegen Sie sich nun, analog zu Aufgabe 20b, eine Formel für den Flächeninhalt A_B von B, in der nur noch $f(x_1, x_2)$ aber nicht mehr $\vec{r}(\vec{u})$ vorkommt.

c) Berechnen Sie damit A_B für $f(x_1, x_2) = x_1 + \frac{2}{3}\, x_2^{3/2}$ und $T = [0, 1] \times [0, 1]$.

Aufgabe 28

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie den Gradienten von

a) $\Phi(\vec{x}) := f(\vec{a} \cdot \vec{x})$, wo $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ beliebig aber fest. (Resultat: $\vec{a}\, f'(\vec{a} \cdot \vec{x})$.)

b) $\Phi(\vec{x}) := f(|\vec{x}|)$, $\vec{x} \neq \vec{0}$. (Resultat: $\vec{e}_x\, f'(|\vec{x}|)$ mit $\vec{e}_x := \vec{x}/|\vec{x}|$.)

c) $\Phi(\vec{x}) := \ln(|\vec{x}|)$, $\vec{x} \neq \vec{0}$.

d) $\Phi(\vec{x}) := |\vec{x}|^q$, $q \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$.

e) $\Phi(\vec{x}) := (\vec{x} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$, wo $\vec{a}$, $\vec{b}$ beliebig aber fest und $\vec{x}$, $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$.