

Weitere Folgerung

Sei $\vec{f} \in \mathbb{R}^3$ [Vektor, nicht VF!],

$$\vec{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \vec{0}, \quad k := |\vec{k}|$$

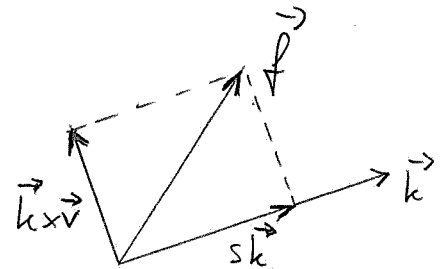
$$s := \frac{\vec{f} \cdot \vec{k}}{k^2}, \quad \vec{v} := \frac{\vec{f} \times \vec{k}}{k^2}$$

RdP 1 : für bel. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad [“bac - cab”]$$

$$\Rightarrow \vec{k} \times \vec{v} = \frac{\vec{k} \times (\vec{f} \times \vec{k})}{k^2} = \frac{\vec{f} \overbrace{(\vec{k} \cdot \vec{k})}^{k^2}}{k^2} - \frac{\vec{k} \overbrace{(\vec{k} \cdot \vec{f})}^{\vec{f} \cdot \vec{k}}}{k^2} = \vec{f} - \vec{k} \cdot s$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\vec{f}}_{\parallel \vec{k}} = \underbrace{s \vec{k}}_{\parallel \vec{k}} + \underbrace{\vec{k} \times \vec{v}}_{\perp \vec{k}}$$



Für $\vec{f} = \vec{f}_1 + i\vec{f}_2 \in \mathbb{C}^3$ ebenso (mit $s = s_1 + is_2$, $\vec{v} = \vec{v}_1 + i\vec{v}_2$)

Jetzt : $\vec{f} := \vec{\tilde{f}}(\vec{k}) \Rightarrow s = s(\vec{k}), \vec{v} = \vec{v}(\vec{k}), \vec{\tilde{f}}(\vec{k}) = s(\vec{k})\vec{k} + \vec{k} \times \vec{v}(\vec{k})$
 $\uparrow$
 $\vec{k}$ bel. aber fest

$\Rightarrow$ zu jedem $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ mit FT $\vec{f}(\vec{h})$ existiert

$$\vec{\phi}(\vec{h}) := \frac{s(\vec{h})}{i} \quad \text{und} \quad \vec{A}(\vec{h}) := \frac{\vec{v}(\vec{h})}{i} \quad \text{mit}$$

$$\vec{f}(\vec{h}) = i \vec{h} \vec{\phi}(\vec{h}) + i \vec{h} \times \vec{A}(\vec{h})$$

$\Leftrightarrow$ es existieren $\phi(\vec{x})$ und $\vec{A}(\vec{x})$ mit
 $\uparrow$
 FT ein-eindeutig!

$$\underline{\vec{f}(\vec{x}) = \text{grad } \phi(\vec{x}) + \text{rot } \vec{A}(\vec{x})}$$

• Falls $\text{rot } \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \Rightarrow i \vec{h} \times \vec{f}(\vec{h}) = \vec{0} \quad \forall \vec{h} \Rightarrow \vec{v}(\vec{h}) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{h}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}(\vec{x}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{f}(\vec{x}) = \text{grad } \phi(\vec{x})}$$

$\uparrow$
FT ein-eind.!

• Falls $\text{div } \vec{f}(\vec{x}) = 0$ $\Rightarrow \dots$ analog $\dots \Rightarrow \underline{\vec{f}(\vec{x}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{x})}$

Damit Sätze 1-3 aus Kap. 6, 7 beweisen!

9 Die Diracsche Deltafunktion

Auch „ δ -Funktion“ genannt. Definierende Eigenschaften:

$$(i) \quad \underline{\underline{\delta(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}}$$

$$(ii) \quad \underline{\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \delta(x) = 1}}$$

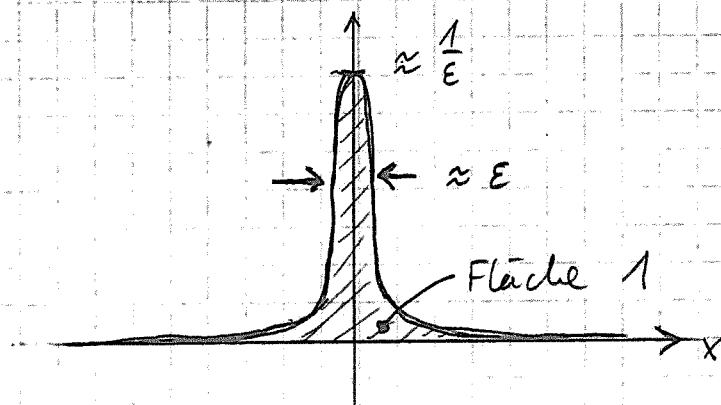
Eine solche Funktion gibt es eigentlich gar nicht!

(aus (i) folgt $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \delta(x) = 0$, falls $\delta(x)$ integrierbar)

Mathematik: neues mathem. Objekt, sog. „ (δ) -Distribution“

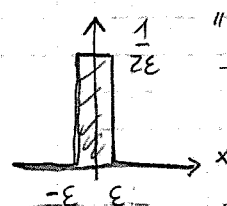
Physik: Limes einer "bel. scharf gepackten Fkt."

$\delta_\epsilon(x)$ (sog. "Praw-S-Fkt.") $\rightarrow \delta(x)$ für $\epsilon \rightarrow 0$



z. B.

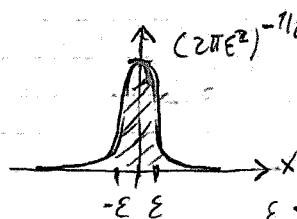
$$\delta_\epsilon(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & \text{falls } |x| < \epsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



"Kasten"

$\epsilon \rightarrow 0 \rightarrow \delta(x)$

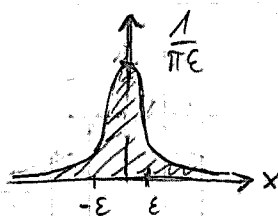
$$\delta_\epsilon(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon^2}}$$



"Gaussverteilung"
Bsp. 8.1!

$\epsilon \rightarrow 0 \rightarrow \delta(x)$

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2}$$



$\epsilon \rightarrow 0 \rightarrow \delta(x)$

sog. Cauchy-Lorentz-Verteilung

usw

Rezept: rechne „ganz normal“ mit „Pria- δ -Fkt.“ $\delta_\epsilon(x)$;

Limes $\epsilon \rightarrow 0 \Leftrightarrow \delta_\epsilon(x) \rightarrow \delta(x)$ am Ende;

Stillschweig. Ann: Limes $\epsilon \rightarrow 0$ vertauscht mit

anderen Limes (Integrale, Ableitungen, ...)

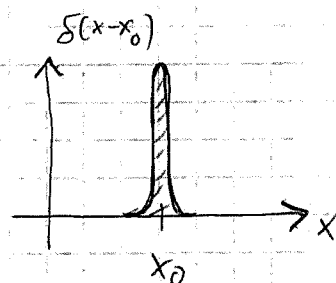
Folgerungen:

- „ $\delta(0) = 1$ “

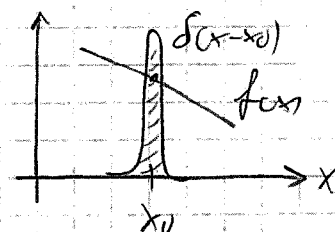
- $\delta(-x) = \delta(x)$

- $\delta(x-x_0)$ (Fkt. von x ; x_0 bel. aber fest)

hat bei $x=x_0$ einen „ δ -Peak“



- $$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x-x_0) f(x) = f(x_0)$$



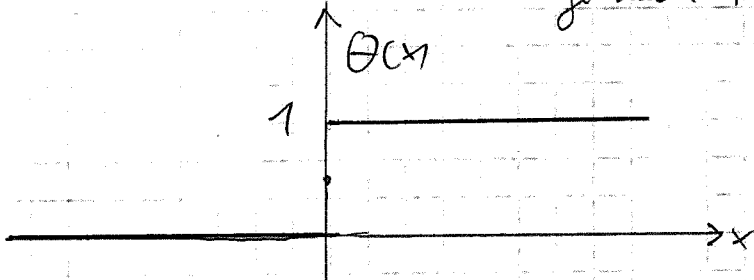
falls $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) bei x_0 stetig

$\Leftrightarrow \underline{\underline{f(x) \delta(x-x_0) = f(x_0) \delta(x-x_0)}}$ (oft sehr nützlich!)

$$\bullet \int_a^b dx \delta(x-x_0) f(x) = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls } x_0 \in (a,b) \\ 0 & \text{falls } x_0 \notin [a,b] \\ \text{je nach Prä-}\delta\text{-Fkt falls } x_0 = a \text{ oder } x_0 = b \\ & (\text{meist } \frac{1}{2} f(x_0)) \end{cases}$$

↑
stetig bei x_0

• Stammfkt.:

$$\Theta(x) := \int_{-\infty}^x dy \delta(y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \\ \text{je nach Prä-}\delta\text{-Fkt falls } x = 0 \\ & (\text{meist } 1/2) \end{cases}$$


„Heaviside-, Stufen-, Theta-Fkt.“

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\Theta'(x) = \delta(x)}}$$

Analog: $\Theta_\epsilon(x) := \int_{-\infty}^x dy \delta_\epsilon(y)$ „Prä- Θ -Fkt.“

$$\longrightarrow \Theta(x) \text{ für } \epsilon \rightarrow 0$$

FT :

$$\underline{\underline{\tilde{\delta}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{-ikx} \delta(x) = 1}}$$

$$\text{Rücktrafo: } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \, e^{+ikx} \underbrace{\tilde{\delta}(k)}_{=1} = \delta(x)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} dk \, e^{ikx} = 2\pi \delta(x)}}$$