

8 Fouriertransformation

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$ so, dass

$$\tilde{f}(k) := \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} f(x)$$

für alle $k \in \mathbb{R}$ existiert : sog. Fouriertransformation (FT).

$\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $k \mapsto \tilde{f}(k)$ heißt Fouriertransformierte (FT) von $f(x)$.

Alternativ:

- e^{+ikx} , $\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}$, ... statt e^{-ikx}

- $f(k)$, $FT(f)$, $F\{f(x)\}$, ... statt $\tilde{f}(k)$

- $\int$ statt $\int_{-\infty}^{+\infty}$

Beisp: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ (Gauß-Verteilung).

Bem: ist normiert, d.h. $\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) = 1$ (vgl. Kap. 7.4, S. 7.17).

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}_{= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-Q}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-Q} \end{aligned}$$

$$Q = ikx + \frac{x^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\underbrace{x^2 + 2\sigma^2 ikx + (\sigma^2 ik)^2}_{(x + i\sigma^2 k)^2} - \underbrace{(\sigma^2 ik)^2}_{+\sigma^4 k^2} \right)$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(k) = e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}} G(i\sigma^2 k)$$

$$\begin{aligned} G(z) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x+z)^2}}_{= f(x+z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} f_k \\ &= f(x+z) \stackrel{\uparrow}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} f(x) \\ &\quad \uparrow \text{ Taylor} \\ &\quad f \text{ von oben!} \end{aligned}$$

$$f_k := \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{d^k}{dx^k} f(x)}_{\substack{\text{falls } k \geq 1 : \searrow \\ = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \text{Polynom}(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k=0 \text{ (Normierung)} \\ 0 & \text{falls } k \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{G(z) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad [\text{unabh. von } z!]}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tilde{f}(k) = e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}}}}$$



Bem: für viele konkrete $f(x)$ ist explizite Auswertung von

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} f(x) \quad \text{schwierig!}$$

8.1 Hauptsatz

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{+ikx} \tilde{f}(k) = f(x)}$$

sog. Fourier-Rück- oder -Umkehr-Transf.

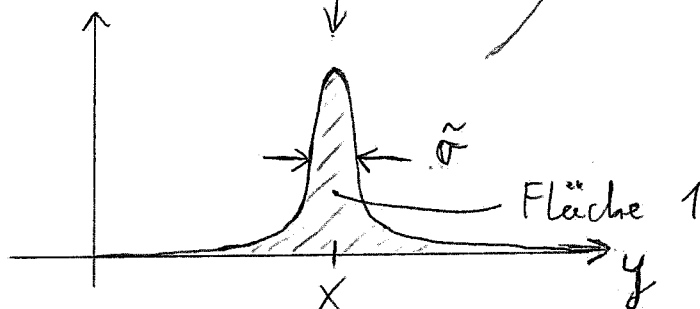
"Bew": $\frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} \underbrace{\tilde{f}(k)}_{\int dy e^{-iky} f(y)}$ multipliziere mit
 $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\frac{k^2}{2T^2}} = 1$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \int dy f(y) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \sqrt{2\pi T^2}}_{\sqrt{\frac{T^2}{2\pi}}} \underbrace{\int dk \frac{1}{\sqrt{2\pi T^2}} e^{-\frac{1}{2T^2} k^2 + ik(x-y)}}_{\substack{\text{wie oben} \\ = e^{-\frac{T^2(x-y)^2}{2}}}}$$

$$\tilde{\sigma} := \frac{1}{T}$$

$$\downarrow$$

$$= \lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow 0} \int dy f(y) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi \tilde{\sigma}^2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\tilde{\sigma}^2}}}_{\substack{\text{Fläche 1} \\ \text{falls } f(y) \text{ hinreichend "zahn" }}} = f(x) \quad \text{"■"}$$



Folgerungen:

- $f(x) \leftrightarrow \tilde{f}(k)$ ein-eindeutig : keine Info verloren !

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} \tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} \underbrace{ik \tilde{f}(k)}_{\text{muss FT von } f'(x) \text{ sein, da ein-eind. !}}$$

$\Rightarrow$ die FT von $f'(x)$ ist $ik \tilde{f}(k)$

„ableiten im direkten Raum $\hat{=}$ multiplizieren im Fourierraum“

$$\Rightarrow \text{FT von } f''(x) \text{ ist } \underbrace{(ik)^2}_{-k^2} \tilde{f}(k) \quad \text{usw}$$

- Man kann (prakt.) jede Fkt. $f(x)$ als

„Summe“ (bzw. Integral) von Fkt'en der Form e^{ikx} schreiben

(mit „Gewichten“ $\tilde{f}(k)$). Ebenso (da $e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx)$)

als Summe von Fkt'en der Form $\cos(kx)$ und $\sin(kx)$.

- $$\frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} \int dy e^{-iky} f(y) = f(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk \int dy e^{ik(x-y)} f(y)$$

18.2 Verallgemeinerungen

1.) Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(\vec{x})$ so, dass

$$\underline{\tilde{f}(\vec{k}) := \int d^n x \, e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} f(\vec{x})}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \, e^{-ik_1 x_1} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \, e^{-ik_n x_n} f(x_1, \dots, x_n)$$

für alle $\vec{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ existiert ("n-dim. FT").

$\Rightarrow$ Rücktrafo :

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int d^4k e^{+i\vec{k} \cdot \vec{x}} \tilde{f}(\vec{k}) =$$

$$\int dk_1 \dots \int dk_n$$

$$\hookrightarrow \int d^4y e^{-i\vec{k} \cdot \vec{y}} f(\vec{y})$$

$$\int dy_1 \dots \int dy_n$$

$$\begin{aligned} & e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{y}} = e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \\ & = e^{ik_1(x_1 - y_1) + \dots + ik_n(x_n - y_n)} \\ & = e^{ik_1(x_1 - y_1)} \dots e^{ik_n(x_n - y_n)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int dk_1 \int dy_1 e^{ik_1(x_1 - y_1)} \dots \frac{1}{2\pi} \int dk_n \int dy_n e^{ik_n(x_n - y_n)} f(y_1, \dots, y_n)$$

$y_1, \dots, y_{n-1}$ "fest"

$\Rightarrow f$ "gewöhnliche Fkt" von y_n allein

Folgerung S. 8.5'

$$\stackrel{\text{Folgerung S. 8.5'}}{=} f(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n)$$

$\dots$ (alles außer y_k fest $\Rightarrow f(y_1, \dots, y_{k-1}, x_k, \dots, x_n) \dots$

$$= f(\vec{x})$$

Folgerungen

$$\cdot \quad f(\vec{x}) \leftrightarrow \tilde{f}(\vec{h}) \quad \text{ein-eind.}$$

$$\cdot \quad \frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k \, e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \tilde{f}(\vec{h}) \right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k \, e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} i\vec{h} \cdot \vec{x} \right) \tilde{f}(\vec{h})$$

$$\underbrace{\quad = k_1 x_1 + \dots + k_n x_n \quad}_{= i k_j}$$

$$\Rightarrow \text{die FT von } \frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{x}) \text{ ist } i k_j \tilde{f}(\vec{h})$$

$$\Rightarrow \text{die FT von } \text{grad } f(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot f(\vec{x}) \quad \left| \vec{\nabla} = \sum_{j=1}^n \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ in kart. Koord.} \right.$$

$$\text{ist } \sum_{j=1}^n \vec{e}_j (i k_j \tilde{f}(\vec{h})) = \underline{\underline{i \vec{k} \tilde{f}(\vec{h})}}$$

2.) Für Vektorfelder

$$\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^m, \quad \vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

wie immer alles „komponentenweise“:

$$\underline{\underline{\vec{\tilde{f}}(\vec{h}) := \int d\vec{x} \, e^{-i\vec{h} \cdot \vec{x}} \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(\vec{h}) \\ \vdots \\ \tilde{f}_m(\vec{h}) \end{pmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\Rightarrow \vec{f}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\vec{h} \, e^{+i\vec{h} \cdot \vec{x}} \vec{\tilde{f}}(\vec{h})}}$$

Folgerungen

- Für $m=n$: die FT von $\operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x})$ ist $i\vec{h} \cdot \vec{\tilde{f}}(\vec{h})$
- Für $m=n=3$: die FT von $\operatorname{rot} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x})$ ist $i\vec{h} \times \vec{\tilde{f}}(\vec{h})$

Bew: selbst!