

7.7 Gradient

Per Def. soll gelten:

$$\boxed{d\phi = \text{grad } \phi \cdot d\vec{r}} \quad (\text{"infinit. Feldänderung bei Ortsänderung } d\vec{r} \text{"})$$

unabhängig vom gewählten Koordinatensystem.

("totales Differential", vgl. Kap. 6.5, S. 6.44; Motivation später)

Kap. 7.2

Wähle speziell $d\vec{r} = d\vec{r}_{u_k} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k} \cdot du_k = \vec{e}_{u_k} h_{u_k} du_k$ (keine Summation!)

Def. oben

$$\Rightarrow d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial u_k} du_k \stackrel{\text{Def. oben}}{=} \text{grad } \phi \cdot d\vec{r}_{u_k} = \text{grad } \phi \cdot \vec{e}_{u_k} h_{u_k} du_k$$

nur u_k ändert sich

$$= (\text{grad } \phi)_{u_k} \quad (\text{Kap. 7.5: } \vec{F}_{u_k} = \vec{F} \cdot \vec{e}_{u_k})$$

$du_k \neq 0$, k beliebig (keine Summation) $\Rightarrow$

$$(\text{grad } \phi)_{u_k} = \frac{1}{h_{u_k}} \frac{\partial \phi}{\partial u_k} \quad \forall k. \quad \text{Mit Kap. 7.5: } \vec{F} = \sum_{k=1}^3 \vec{e}_{u_k} \cdot F_{u_k} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \phi := \text{grad } \phi = \sum_{k=1}^3 \frac{\vec{e}_{u_k}}{h_{u_k}} \frac{\partial \phi}{\partial u_k}}$$

Beim:

(i) $\vec{\nabla} \phi$ so definiert.

(ii) in Allg. $\neq \sum_{k=1}^3 \vec{e}_{u_k} \frac{\partial \phi}{\partial u_k}$!

(iii) Argumente $\vec{u}$ bzw. $\vec{r}$ weggelassen.

Beisp: in Zylinderkoord.

$$\underline{\underline{\vec{\nabla} \phi(\varrho, \varphi, z) = \left(\vec{e}_\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi(\varrho, \varphi, z)}}$$

Kugelkoord. $\rightarrow$ Übungen

Motivation der Def.

So (und nur so) wird Wegintegral $\int_C d\phi(\vec{r}) = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1)$

(Kap. 6.6, S. 6.48) entlang eines Gradientenfeldes unabh. von

Wahl der Koordinaten.

7.8 Divergenz

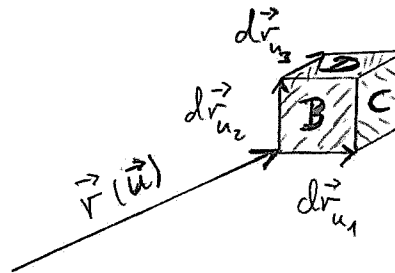
Per Def. soll gelten

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{f} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_{\partial V} d\vec{\lambda} \cdot \vec{f}(\vec{r})} \quad (\text{"Quelldichte"})$$

unabhängig vom gewählten Koordinatensystem.

(vgl. Kap. 6.8, S. 6.64; Motivation später)

Speziell für kleinen Quader



Strom durch B aus dem Quader heraus:

$$S_B = - \oint_{u_3} \cdot B$$

↑ Komponente von $\vec{f}$ in Richtung $\vec{e}_{u_3}$ bzw. $d\vec{r}_{u_3}$

Erinnerung: $d\vec{r}_{u_k} = \vec{e}_{u_k} h_{u_k} du_k$

$$B = |d\vec{r}_{u_1}| |d\vec{r}_{u_2}| = h_{u_1} h_{u_2} du_1 du_2$$

Mit $g := \oint_{u_3} h_{u_1} h_{u_2}$ (ohne Argumente $\vec{u}$)

folgt

$$S_B = -g(\vec{u}) du_1 du_2 \quad (\text{jetzt mit Arg. } \vec{u})$$

Analog: Strom durch Fläche B' „gegenüber von B “ $\Rightarrow \vec{u} \rightarrow \vec{u} + \vec{e}_{u_3} du_3$

$$S_{B'} = + g(\underbrace{\vec{u} + \vec{e}_{u_3} du_3}_{= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 + du_3 \end{pmatrix}}) du_1 du_2$$

$$= g(\vec{u}) + \frac{\partial}{\partial u_3} g(\vec{u}) du_3 \quad (\text{exakt für } du_3 \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow S_B + S_{B'} = -g \, du_1 \, du_2 + \left(g + \frac{\partial}{\partial u_3} g \, du_3 \right) du_1 \, du_2$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{hebt sich weg}} \quad \uparrow = \int_{u_3} h_{u_1} h_{u_2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\int_{u_3} \underbrace{h_{u_1} h_{u_2}} \right) du_1 \, du_2 \, du_3$$

$$= \frac{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}}{h_{u_3}}$$

Genauso für Quaderseiten C und C':

$$S_C + S_{C'} = \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\int_{u_1} \frac{h_{u_2} h_{u_3} h_{u_1}}{h_{u_1}} \right) du_1 \, du_2 \, du_3$$

Genauso für D und D' ...

$\Rightarrow$ Gesamtstrom durch Quaderoberfl. ∂V :

$$\iint_{\partial V} \vec{dA} \cdot \vec{f}(\vec{r}) \approx \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_k} \left(f_{u_k} \frac{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}}{h_{u_k}} \right) du_1 du_2 du_3$$

↖ existiert für $du_k \rightarrow 0$

Volumen des Quaders $V \stackrel{\downarrow}{\approx} |\vec{dr}_{u_1}| |\vec{dr}_{u_2}| |\vec{dr}_{u_3}| = h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3} du_1 du_2 du_3 \Rightarrow$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} := \operatorname{div} \vec{f} = \frac{1}{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_k} \left(f_{u_k} \frac{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}}{h_{u_k}} \right)$$

↖ [hat eigentlich nichts mehr mit Skalarprod. zu tun]

Bem:

(i) $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$ so definiert

(ii) im Allg. $\neq \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_k} f_{u_k}$

(iii) Argumente $\vec{u}$ bzw. $\vec{r}$ weggelassen.

Beisp.: Übungen (Kugelkoordin.)

7.9 Laplace-Operator

$$\Delta \phi := \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = \frac{1}{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\frac{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}}{(h_{u_k})^2} \frac{\partial}{\partial u_k} \phi \right)$$

- wieder unabh. vom gewählten Koordinatensystem
- wieder Bem. analog zu (i) - (iii)
- Beisp: ⁿÜbungen

7.10 Rotation

Per Def. soll gelten

$$\vec{n}_s \cdot \operatorname{rot} \vec{f} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \int_{\partial S} d\vec{v} \cdot \vec{f}(\vec{v})$$

unabh. vom gewählten Koordinatensystem (vgl. Kap. 6.9, S. 6.72)

Daraus folgt (Lang & Pucker, Kap. 8.2 ; Grossmann Kap. 8.2.1)

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} := \operatorname{rot} \vec{f} = \sum_{k=1}^3 \frac{\vec{e}_{u_k}}{h_{u_{k+1}} h_{u_{k+2}}} \left[\frac{\partial}{\partial u_{k+1}} (f_{u_{k+2}} h_{u_{k+2}}) - \frac{\partial}{\partial u_{k+2}} (f_{u_{k+1}} h_{u_{k+1}}) \right]$$

↖ [hat eigentlich nichts mehr mit Kreuzprodukt zu tun]

$$u_4 := u_1, \quad u_5 := u_2$$

Bem. (i)-(iii) analog.

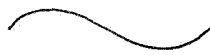
Beisp: Übungen

7.11 Fazit

Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ für sich nur in Kartesischen Koord.

sinnvoller (einheitlicher) „Vektor“, und nur dann gegeben

als $\sum_{k=1}^3 \vec{e}_{u_k} \frac{\partial}{\partial u_k}$, ansonsten nicht, vgl. Übungen.



Plausibel, detaillierter Beweis jedoch umständlich und daher weggelassen:

Dank der Koordinaten-unabh. Def. von grad, div, Δ , rot folgt.

- „Rechenregeln“ für grad, div, Δ , rot (z.B. $\text{div}(\text{rot } \vec{f}) = 0$ usw.: Übungen) (Vektorial S. 7.22)
immer richtig (unabh. von Wahl des Koordinatensystems).

- ebenso Integralsätze (und Folgerungen daraus): nächstes Kap.

[$\Leftrightarrow$ angehängte „Rotation“]

7.12 Integralsätze

Vgl. Kap. 6, 8, 9

Satz von Gauß

Sei $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig diff'bar und $V \subset D$ ein „Volumen“ mit stückweise glattem, „nach aussen“ orientiertem Rand ∂V .

Dann gilt

$$\underbrace{\int_V dV \operatorname{div} \vec{f}(\vec{x})}_{=: \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x})} = \underbrace{\iint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{f}(\vec{r})}_{=: dA \vec{n}(\vec{r})}$$

unabh. von der Wahl des Koordinatensystems, d.h. für jede

Parametrisierung von $V, dV, \partial V, d\vec{A}, \vec{r}(\vec{u}), \vec{f}(\vec{u}) := \vec{f}(\vec{r}(\vec{u}))$.



Satz von Stokes

Sei $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig diff'bar und das „Flächenstück“

$S \subset D$ sowie dessen Rand ∂S stückweise glatt und orientiert

gemäß „Rechte-Hand-Regel“.

Dann gilt

$$\underbrace{\int_S dA}_{=: dA \vec{n}(\vec{r})} \cdot \underbrace{\text{rot } \vec{f}(\vec{r})}_{=: \vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r})} = \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})$$

usw (wie Gauß).



Nachfolgende Tabelle:

Zusammenstellung von Linienelement, grad, dir, rot, Δ

in Kartesischen Koordinaten (mit $\vec{e}_{x,y,z}$ statt $\vec{e}_{1,2,3}$ und

u statt ϕ , $\vec{V}$ statt $\vec{f}$)

sowie in Zylinder- und Kugelkoord.

	Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
$d\vec{s} = d\vec{r}$	$\vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz$	$\vec{e}_\rho d\rho + \vec{e}_\varphi \rho d\varphi + \vec{e}_z dz$	$\vec{e}_r dr + \vec{e}_\vartheta r d\vartheta + \vec{e}_\varphi r \sin \vartheta d\varphi$
$\text{grad} U$	$\vec{e}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial U}{\partial z}$	$\vec{e}_\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial U}{\partial z}$	$\vec{e}_r \frac{\partial U}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$
$\text{div} \vec{V}$	$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (V_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$
$\text{rot} \vec{V}$	$\vec{e}_x \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)$	$\vec{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) + \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right)$	$\vec{e}_r \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (V_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial V_\vartheta}{\partial \varphi} \right] + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi) \right] + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r V_\vartheta) - \frac{\partial V_r}{\partial \vartheta} \right]$
ΔU	$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$