7.3 Variablentransformation für mehrdim. Integrale

Erinnerung (RdP1, Kap. 3.4, insbes. S. 3.25):

Volumenintegral $\hat{=}$ Summe über Beiträge der Form $f(\vec{x}_k)\,\Delta V_k$

$$\xrightarrow{\Delta V_k \to 0} \int_{\mathbb{B}} dV\, f(\vec{x}) = \int_{\mathbb{B}} d^3x\, f(\vec{x}) = \iiint_{\mathbb{B}} dx_1\, dx_2\, dx_3\, f(\vec{x})$$

$\mathbb{B}$ ← Integrationsbereich

Ziel: Trafo von „alten Variablen" $\vec{x}$ (mit $\vec{x} \in \mathbb{B}$) auf „neue Variablen" $\vec{u}$

hier: bisweilen $\vec{x}$ statt $\vec{r}$ benutzt!

- $\tilde{\mathbb{B}} := \{ \vec{u}(\vec{r}) \mid \vec{r} \in \mathbb{B} \}$ [transformierter/neuer Integrationsbereich]

- $$f(\vec{x}_k)\, \underbrace{\Delta V_k}_{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} = f(\vec{r}(\vec{u}_k))\, h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3} \underbrace{\Delta u_1\, \Delta u_2\, \Delta u_3}_{=: \Delta U_k}$$

- $\underline{\underline{J := h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}}}$, sog. „Jacobi-Determinante"

(Argumente $\vec{u}$ weggelassen)

Erinnerung: $\underline{\underline{h_{u_k} := \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k}\right|}}$

$\Rightarrow$ $\iiint\limits_{\tilde{B}} du_1\, du_2\, du_3 \quad J(\vec{u})\, f(\vec{r}(\vec{u}))$ muss selbes Volumenint. ergeben!

(hier Arg. $\vec{u}$ nicht weggelassen!)

$\Leftrightarrow$ Variablentransf. für 3-dim Integrale von Kartesischen auf bel. krummlinige Koordinaten:

$$\boxed{\int\limits_{B} d^3x\; f(\vec{x}) = \int\limits_{\tilde{B}} d^3u\; J(\vec{u})\; f(\vec{r}(\vec{u}))}$$

[„Exkurs"]

7.4 Polarkoordinaten

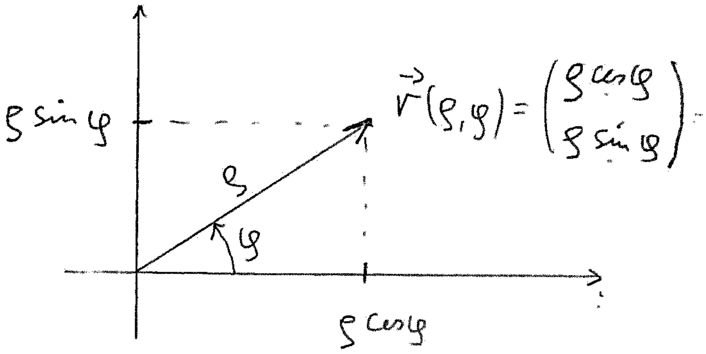
Wie Zylinderkoord., aber jetzt $z=0$ fest, d.h. nur noch

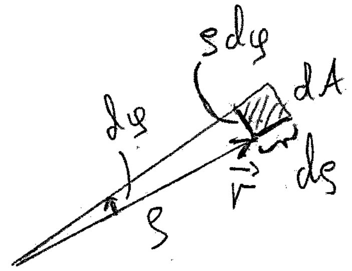
x-y-Ebene bzw. $\mathbb{R}^2$ betrachtet:

$\vec{r} = \vec{r}(\vec{u}) \in \mathbb{R}^2$

$\vec{u} = (\rho, \varphi)$

$\rho \in \mathbb{R}_0^+ \quad , \quad \varphi \in [0, 2\pi)$





Anschaulich: $\quad dA = \rho \underbrace{d\varphi\, d\rho}_{du_1 du_2 =: d^2u}$

Formal: $\quad h_\rho h_\varphi = h_{u_1} h_{u_2} = J(\vec{u})$

entspricht jetzt „Volumen" im $\mathbb{R}^2$ (daher nicht $d\vec{A}$).

$$\Rightarrow \quad \int_{B} d^2x \; f(\vec{x}) \quad = \quad \int_{\tilde{B}} d^2u \; J(\vec{u}) \; f(\vec{r}(\vec{u}))$$

B: Integrationsbereich $\subset \mathbb{R}^2$

$\vec{x}$: (x_1, x_2)

$\tilde{B} := \{ \vec{u}(\vec{r}) \mid \vec{r} \in B \}$

- $J(\vec{u}) := h_{u_1} h_{u_2} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \right| \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right|$

- Vergl. mit Substitution/Variablentrafo in 1d (Vorkurs):

$$\int_a^b dx \; f(x) = \int_\alpha^\beta dy \; g'(y) \; f(g(y))$$

$$g(\alpha) = a \,, \quad g(\beta) = b \quad \Leftrightarrow \quad B := [a,b] = \{ g(y) \mid y \in \underbrace{[\alpha, \beta]}_{\tilde{B}} \}$$

Beisp: $f(\vec{x}) = e^{-a(x_1^2+x_2^2)} \qquad (a \in \mathbb{R}^+)$

$$\Rightarrow f(\vec{r}(\vec{u})) = e^{-a\big(\underbrace{(r_1(\vec{u}))^2+(r_2(\vec{u}))^2}_{(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2)=\rho^2}\big)} = e^{-a\rho^2}$$

$$B = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \rho \in \mathbb{R}_0^+,\ \varphi \in [0,2\pi) \Leftrightarrow \tilde{B} = \mathbb{R}_0^+ \times [0,2\pi)$$

$$\int_B d^2x\, f(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \quad e^{-a(x_1^2+x_2^2)}$$

direkte Auswertung schwierig!

$$= \int_{\tilde{B}} d^2u\, J(\vec{u})\, f(\vec{r}(\vec{u})) = \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi\ \rho\ e^{-a\rho^2}$$

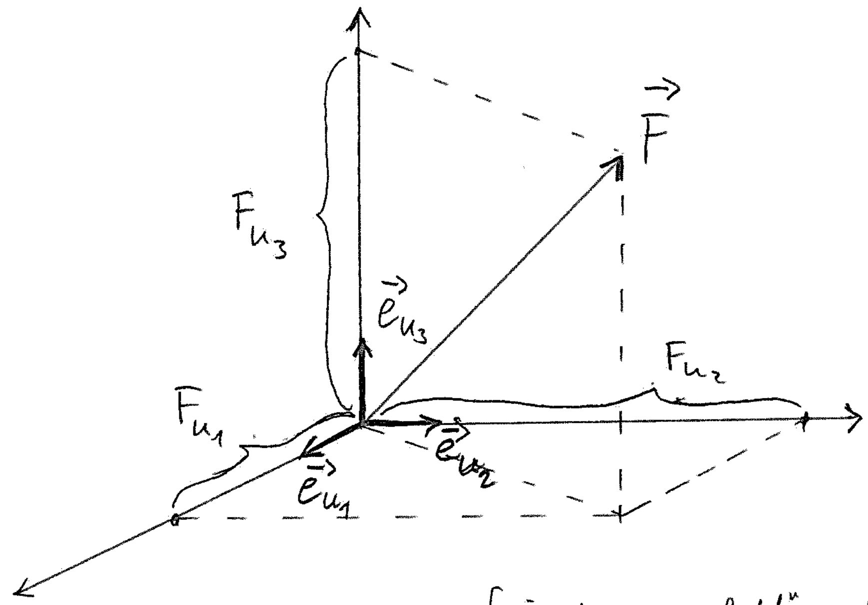
$$= \int_0^\infty d\rho\ \rho\ e^{-a\rho^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot 1}_{\varphi\big|_0^{2\pi} = 2\pi - 0} = 2\pi \underbrace{\int_0^\infty d\rho\ \rho\ e^{-a\rho^2}}_{-\frac{1}{2a} e^{-a\rho^2}\big|_0^\infty = -\frac{1}{2a}(0-1)} = 2\pi \cdot \frac{1}{2a} = \frac{\pi}{a}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1\, e^{-ax_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2\, e^{-ax_2^2}}_{=\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ e^{-ax^2}\right)^2} = \frac{\pi}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}}$$

7.5 Bestimmung von Vektorkomponenten

Darstellung von $\vec{F} \in \mathbb{R}^3$ mittels Orthogonalbasis $\vec{e}_{u_k}$, $k=1,2,3$:



[im Allg. „verdreht" zu Kart. Koord.!]

$$\underline{\underline{\vec{F}}} = \vec{e}_{u_1} F_{u_1} + \vec{e}_{u_2} F_{u_2} + \vec{e}_{u_3} F_{u_3} = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{3} \vec{e}_{u_k} F_{u_k}}}$$

$$\underline{\underline{F_{u_k} := \vec{F} \cdot \vec{e}_{u_k} = \frac{1}{h_{u_k}} \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k}}}$$

(keine Summation!)

[hängt alles von $\vec{u}$ ab, bzw. vom „Anfangspkt." $\vec{r}(\vec{u})$ des Vektors $\vec{F}$!]

7.6 Skalar- und Vektorfelder

Skalarfeld $\phi(\vec{r})$ äquivalent zu $\phi(\vec{u}) := \phi(\vec{r}(\vec{u}))$

[selbes Symbol ϕ „unsauber" aber „prakt."]

Dabei werden Argumente $\vec{r}$ bzw $\vec{u}$ oft weggelassen.

Analog: Vektorfeld $\vec{f}(\vec{r})$ äquivalent zu $\vec{f}(\vec{u}) := \vec{f}(\vec{r}(\vec{u}))$

Dabei wählt man stillschweigend Basis $\vec{e}_{u_k}$ immer am

jeweiligen Ort $\vec{r}$ bzw. $\vec{u}$

Kap. 7.5 mit j statt k!

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial \vec{f}}{\partial u_k}}} \overset{\downarrow}{=} \frac{\partial}{\partial u_k}\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{3}}_{\uparrow} \vec{e}_{u_j} f_{u_j}\Big) = \underline{\underline{\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial \vec{e}_{u_j}}{\partial u_k} f_{u_j} + \vec{e}_{u_j}\frac{\partial f_{u_j}}{\partial u_k}\right)}}$$

nicht k!

[im Allg. $\neq \vec{0}$!]

Beisp: $\vec{f}(\vec{r}) = \vec{r}$ in Zylinderkoord.:

$$f_{u_1} = r_\varrho = \vec{r} \cdot \vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \varrho \cos\varphi \\ \varrho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \varrho$$

Kap. 7.5

$$f_{u_2} = r_\varphi = \vec{r} \cdot \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -''- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$f_{u_3} = r_z = \vec{r} \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} -'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = z$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{r} = \vec{e}_\varrho \cdot \varrho + \vec{e}_z \cdot z}}$$

Betrachte jetzt $\vec{r} = \vec{r}(t)$ als „Teilchenbahn" $\Rightarrow$

Argumente t weggelassen

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}\left(\vec{e}_\varrho \cdot \varrho + \vec{e}_z \cdot z\right) = \dot{\vec{e}}_\varrho \, \varrho + \vec{e}_\varrho \dot{\varrho} + \dot{\vec{e}}_z \cdot z + \vec{e}_z \cdot \dot{z}$$

$$\dot{\vec{e}}_\varrho = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t)\,\dot{\varphi}(t) \\ \cos\varphi(t)\,\dot{\varphi}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_\varphi \, \dot{\varphi}$$

$$\dot{\vec{e}}_z = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\dot{\vec{r}}(t) = \vec{e}_\varrho \, \dot{\varrho} + \vec{e}_\varphi \, \dot{\varphi} \, \varrho + \vec{e}_z \, \dot{z}}}$$