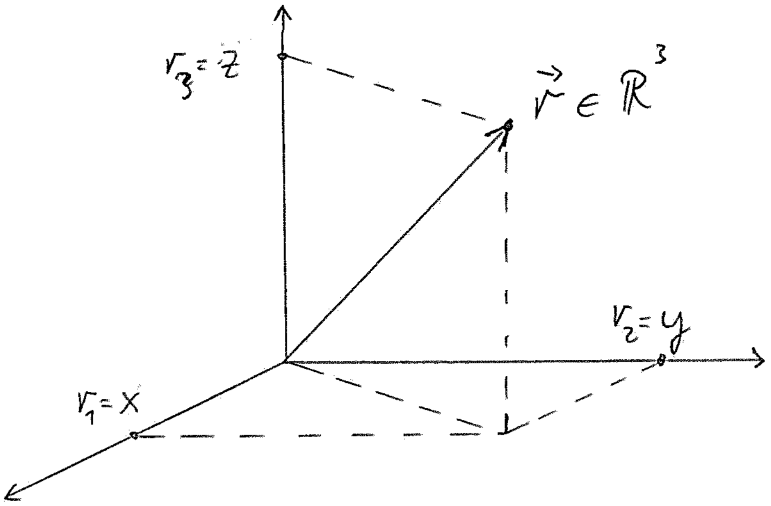
7 Krummlinige Koordinatensysteme

[Lang & Pucker, Kap. 8]

Ein bel. Pkt. $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ lässt sich mittels verschiedener Koordinatensysteme „darstellen".

Wichtigste Beisp.:

1. Kartesische Koordinaten

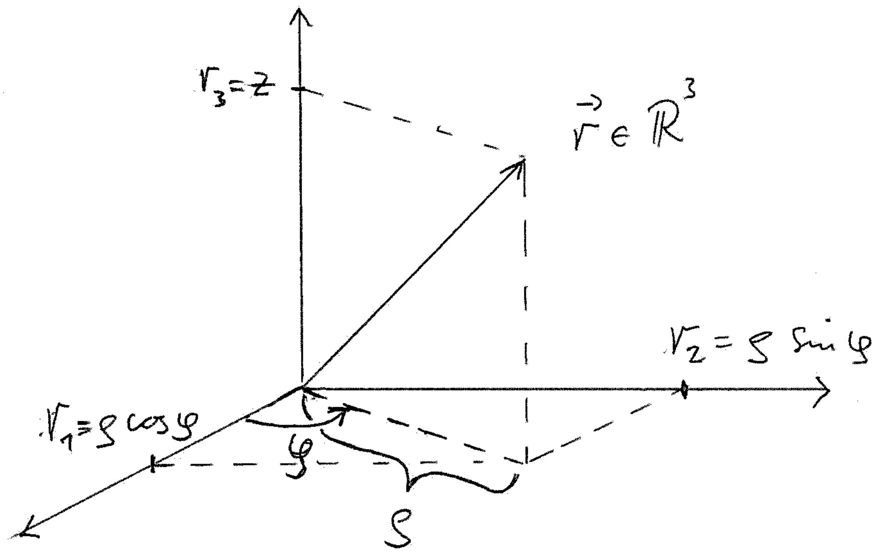


[x, y, z „$\hat{=}$ Kart. Koord von $\vec{r}$"]

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

[ein-eindeutig $\forall \vec{r}$]

2. Zylinderkoordinaten



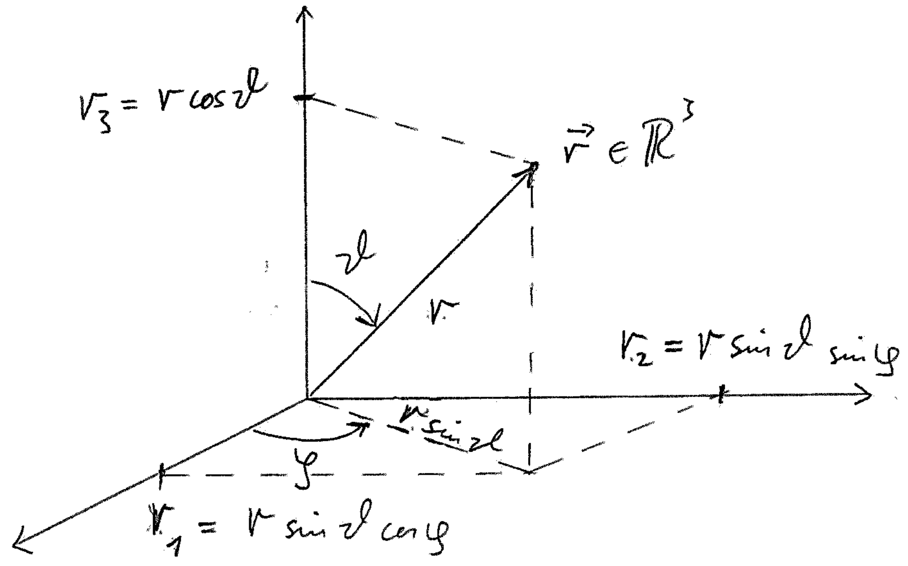
$$\vec{r} = \vec{r}(\varrho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \varrho \cos\varphi \\ \varrho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad , \qquad [\,\varrho, \varphi, z \mathrel{\hat{=}} \text{„Zylinderkoord. v. } \vec{r}\text{"}\,]$$

$$\varrho \in [0, \infty) \quad , \quad \varphi \in [0, 2\pi) \quad , \quad z \in \mathbb{R}$$

[für $\vec{r}$ auf z-Achse: setze $\varphi = 0$ $\Rightarrow$ ein-eindeutig $\forall \vec{r}$]

3. Kugelkoordinaten

(vgl. Kap. 6.3, S. 6.31)



$$\vec{r} = \vec{r}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad [r, \vartheta, \varphi \,\hat{=}\, \text{„Kugelkoord. v. } \vec{r}\text{"}]$$

$$r \in [0, \infty) \quad , \quad \vartheta \in [0, \pi] \quad , \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Bem : $r = |\vec{r}|$

[für $\vec{r} = \vec{0}$: setze $\vartheta = \varphi = 0$ $\Rightarrow$ ein-eindeutig $\forall \vec{r}$]

7.1 Allgemeine Koordinatensysteme $\Leftrightarrow$ ein-eindeutige

Parametrisierung $\vec{r} = \vec{r}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} r_1(\vec{u}) \\ r_2(\vec{u}) \\ r_3(\vec{u}) \end{pmatrix}$, [3 Bsp. für $\vec{u}$: siehe oben]

d.h. Umkehrfkt. $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$ bzw. $u_k = u_k(r_1, r_2, r_3)$

existiert.

Falls man nur ein u_k in $\vec{r}(u_1, u_2, u_3)$ variiert,

erhält man einen Weg (sog. Koordinatenlinie)

mit Tangentenvektor (vgl. Kap. 6.1, S. 6.8)

$$\vec{e}_{u_k} := \frac{1}{h_{u_k}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k}$$ (k = 1,2,3, keine Summation!)

mit $$h_{u_k} := \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k} \right|$$ („metrische Koeffizienten")

Bem:

- Argumente $\vec{u}$ weggelassen!

- Koordinatenlinien im Allg. „krumm". [daher der Name!]

- Variation verschiedener u_k ergeben verschiedene

  „Scharen" von Koordinatenlinien

  $\Rightarrow$ sog. „Koordinatennetze".

  Skizzen für Kartesische, Zylinder-, Kugelkoord. : selbst!

  [ohne Ausdrücke erklären]

- Analog zu: „Wegen" $\vec{r}(t)$ und „Flächen" $\vec{r}(u_1, u_2)$.

<u>Orthogonale Koordinaten $\Leftrightarrow$ $\vec{e}_{u_j} \cdot \vec{e}_{u_k} = \delta_{jk}$.</u>

<u>Ab jetzt vorausgesetzt.</u>

Ferner OBdA : $\underline{\vec{e}_{u_1} \times \vec{e}_{u_2} = \vec{e}_{u_3}}$ (rechtshändige Basis).

Bem: „<u>lokales Dreibein</u>" $\vec{e}_{u_1}, \vec{e}_{u_2}, \vec{e}_{u_3}$ ist von $\vec{u}$ bzw $\vec{r}$ abhängig („dreht sich mit $\vec{r}$ mit").

Beisp.: Zylinderkoord.

$$u_1 = \rho \ , \quad u_2 = \varphi \ , \quad u_3 = z$$

$$\vec{r}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h_{u_1} = h_\rho = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 0} = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{e}_{u_1} = \vec{e}_\rho}} = \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}} \qquad [\, \not\parallel \vec{r} \, ! \,]$$

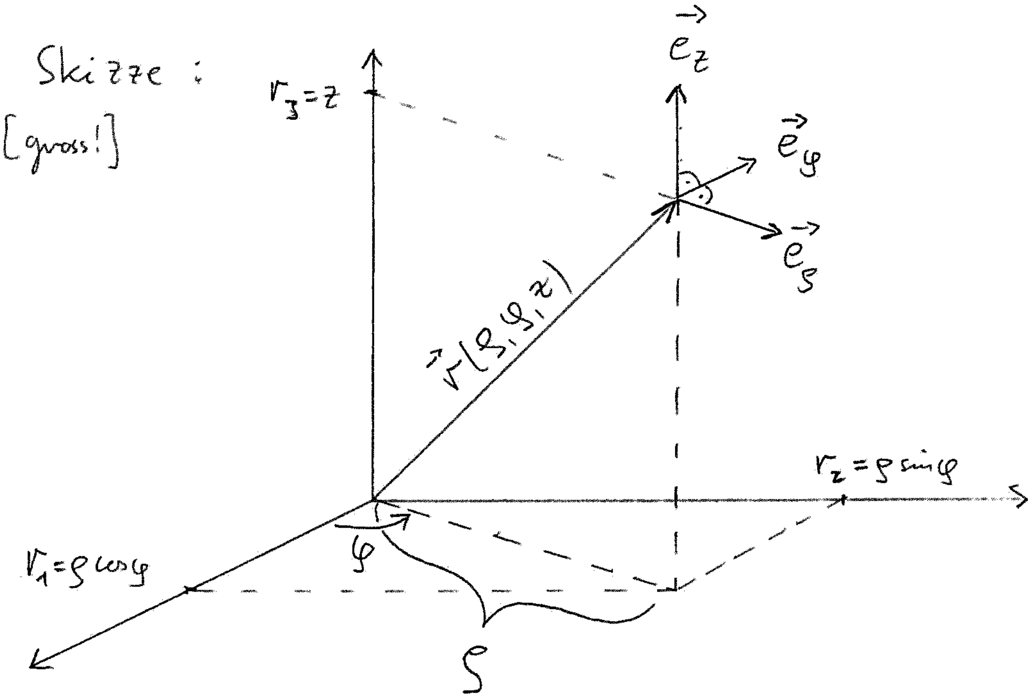
analog: $$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\rho \sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_\varphi = \rho \ , \quad \underline{\underline{\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow h_z = 1 \ , \quad \underline{\underline{\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

$\Rightarrow$ Orthogonal (Details selbst) ✓

$$\vec{e}_\varrho \times \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \end{pmatrix} = \vec{e}_z \quad ✓$$

Skizze :
[gross!]



[nochmals : • Alles hängt von $\vec{u} = (\varrho, \varphi, z)$ ab bzw dreht sich mit $\vec{r}$ mit

• Argumente $\vec{u}$ weggelassen]

7.2 Bogen-, Flächen- und Volumenelement

Wenn sich die k-te Komponente von $\vec{u}$ (d.h. u_k) infinitesimal um du_k ändert, dann ändert sich $\vec{r} = \vec{r}(\vec{u})$ um

$$\underline{\underline{d\vec{r}_{u_k} := \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k} \cdot du_k = \vec{e}_{u_k} \; h_{u_k} \; du_k}}$$

(<u>keine</u> Summation über k!)

$\hat{=}$ „Differential in Richtung der u_k-Koordinatenlinie"

[im Allg. $\neq \vec{e}_{u_k} \, du_k$ (da $h_{u_k} \neq 1$)!]

Name: <u>Bogenelement</u>

Folgerungen: [bzw. Begründung folgender Def.]

1.) Flächenelement einer sog. „Koordinatenhyperfläche"

mit $u_3 = \text{const}$:

$$\underline{\underline{d\vec{A} := d\vec{r}_{u_1} \times d\vec{r}_{u_2} = \underbrace{\left(\vec{e}_{u_1} \times \vec{e}_{u_2}\right)}_{=\vec{e}_{u_3}} h_{u_1} h_{u_2} \, du_1 \, du_2}}$$

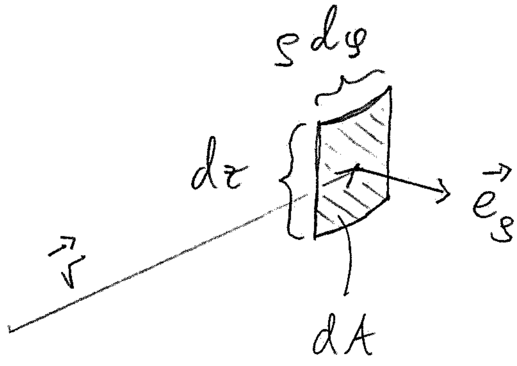
und analog für $u_1 = \text{const.}$ bzw. $u_2 = \text{const.}$

[Argumente ũ weggelassen!]

Beisp: Flächenelement auf Zylindermantel $\hat{=}$

Koordinatenfläche für Zylinderkoord mit $\varrho = \text{const}$:

$$d\vec{A} = \vec{e}_\varrho \; \varrho \; d\varphi \; dz$$



2.) Volumenelement

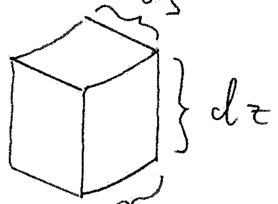
$$dV := \left(d\vec{r}_{u_1} \times d\vec{r}_{u_2}\right) \cdot d\vec{r}_{u_3} = \underbrace{\underbrace{\left(\vec{e}_{u_1} \times \vec{e}_{u_2}\right)}_{=\vec{e}_{u_3}} \cdot \vec{e}_{u_3}}_{=1} h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3} \, du_1 du_2 du_3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{dV = h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3} \; du_1 du_2 du_3}}$$

[Arg. ü weggelassen]

Beisp: Zylinderkoord.

$$dV = \varrho \; d\varrho \, d\varphi \; dz$$



3.) Linienelement

[anschaulich ohne Skizze klar: ist $d\vec{r}$]

$$d\vec{r} := \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k} \cdot du_k = \sum_{k=1}^{3} d\vec{r}_{u_k} = \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_{u_k} h_{u_k} du_k$$

$$\Rightarrow d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_{u_j} h_{u_j} du_j \cdot \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_{u_k} h_{u_k} du_k = \sum_{k=1}^{3} (h_{u_k} du_k)^2$$

$\vec{e}_{u_j} \cdot \vec{e}_{u_k} = \delta_{jk}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{ds := |d\vec{r}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} (h_{u_k} du_k)^2}}}$$

(differenzielle Bogenlänge)

für Weg $\vec{u}(t) \Rightarrow du_k = \frac{du_k(t)}{dt} \cdot dt$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} (h_{u_k} \dot{u}_k)^2}}}$$

$h_{u_k}(\vec{u}(t))$ $\quad$ $\dot{u}_k(t)$