- Falls V selbst sehr klein $\Rightarrow$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{x})$ „innerhalb V" praktisch konstant $\Rightarrow$

$$\int_V dV\, \vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{x}) \xrightarrow[\text{für } V\to 0]{} \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{x})}_{\text{bel. Pkt. in } V} \cdot \int_V dV = \vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{x})\, V \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\operatorname{div}\vec{f}(\vec{x}) = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{f}(\vec{v})}}$$

$\Rightarrow$ <u>„Anschauliche Bedeutung der Divergenz":</u>

- Netto-Durchfluss (= Abfluss − Zufluss) durch infinitesimale Oberfläche pro Volumen.

- Falls $\vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{x}) \neq 0$ wird die zur „Stromdichte $\vec{f}$" gehörige Grösse (z.B. Materie bzw. Masse falls $\vec{f} = \varrho\cdot\vec{v}$) innerhalb V bzw. am Ort $\vec{x}$ „erzeugt" bzw. „vernichtet".

Kurz: <u>Divergenz ist Mass für Quellen bzw. Senken</u> [$\hat{=}$ neg. Quellen]

Noch kürzer: $\underline{\vec{\nabla}\cdot\vec{f} \;\hat{=}\; \text{„Quellen von } \vec{f}\text{“}}$

daher $\vec{\nabla}\cdot\vec{f} = 0 \iff$ „$\vec{f}$ quellenfrei“ (vgl. S. 6.54)

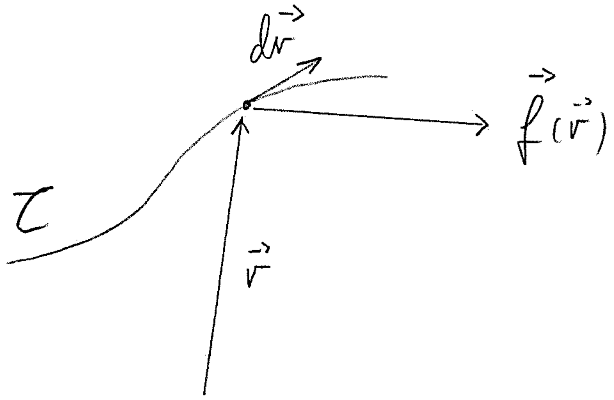
6.9 Satz von Stokes

[Lang & Pucker Kap. 7.5 & 9.3, Weltner Kap. 18]

Betrachte Kraftfeld $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) = \vec{e}_k \underbrace{f_k}_{k=1,2,3}(\vec{x})$.

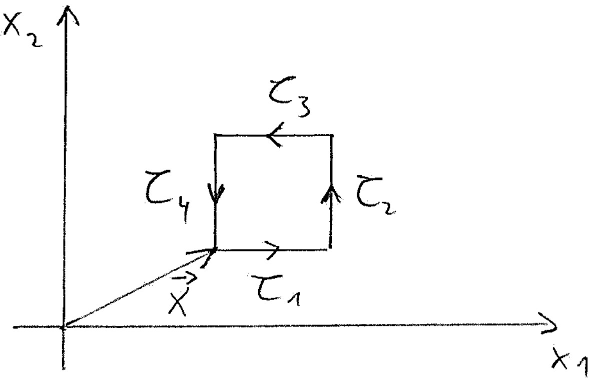
Arbeit entlang Weg $\vec{r}(t)$:

$\int_C d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) \ \hat{=}$ „Summe aller Teil-Arbeiten $d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})$"



Vgl. Kap. 6.2 (Wegintegrale), 2. Sorte (S. 6.16)

Speziell : C geschl. Weg um kleines Quadrat in x_1-x_2-Ebene



Ort $\vec{x}$

Seitenlänge Δ

Fläche $\Delta A = \Delta^2$

Orientierung : positiver Drehsinn („links herum");

Def. der Orientierung von ΔA : $\vec{n} := \vec{e}_3$ („Rechte-Hand-Regel")

Frage: Arbeit entlang geschl. Weg $C = C_1 \oplus \ldots \oplus C_4$?

Antw. : entlang C_1 : $\Delta \cdot f_1(\vec{x})$ (exakt für $\Delta \to 0$)

entlang C_3 : $-\Delta \cdot \underbrace{f_1(\vec{x} + \vec{e}_2 \cdot \Delta)}_{\simeq f_1(\vec{x}) + \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_2} \cdot \Delta}$ —"—

$\Rightarrow$ entlang C_1 und C_3 : $-\Delta^2 \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_2}$ —"—

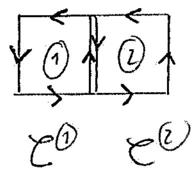
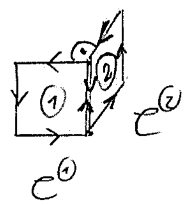
Analog entlang C_4 und C_2 : $+\Delta^2 \dfrac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_1}$

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{exakt für } \Delta \to 0}}{\simeq} \Delta^2 \left(\frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_2} \right)$$

$$= \underbrace{\underbrace{\Delta^2}_{=\Delta A} \underbrace{\vec{e}_3}_{=\vec{n}}}_{\Delta \vec{A}} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x}) \right) = \Delta \vec{A} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x}) \right)$$

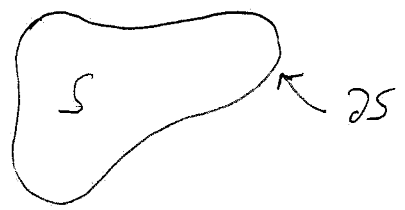
Genauso für kleines Quadrat in x_2-x_3- bzw. x_3-x_1-Ebene.

Jetzt: 2 Quadrate mit gemeinsamer Grenze

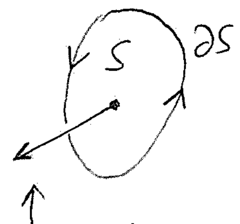
(so:  oder so: )

$\Rightarrow$ Beiträge zu $\oint_{\mathcal{C}^{(1)} \oplus \mathcal{C}^{(2)}} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})$ entlang gemeinsamer Grenzlinie heben sich weg.

Jetzt: bel. <u>Fläche S mit Rand(-linie) ∂S</u>



Orientierung gem. „Rechte-Hand-Regel"



Zerlege S in viele kleine Quadrate an den Orten $\vec{x}_k$ [einzeichnen]

[nur Orientierungen $\vec{n} = \pm \vec{e}_{1,2,3}$; das geht und wird exakt für $\Delta \to 0$]

$$\Rightarrow \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) \simeq \oint_{\oplus_k C^{(k)}} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \sum_k \int_{C^{(k)}} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \sum_k \Delta \vec{A}_k \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x}_k)\right)$$

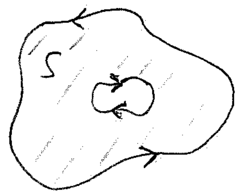
Beiträge zu gemeinsamen („inneren") Grenzlinien heben sich weg, nur „echte Aussengrenzen" relevant

$$\simeq \iint_S d\vec{A} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r})\right)$$

vgl. Kap. 6.4 (Oberflächenintegrale), 2. Sorte (S. 6.39)

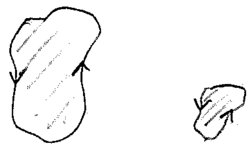
Bem:

S kann sogar „Löcher" haben



(Orientierung!)

oder aus mehreren „Fragmenten" bestehen



$\Rightarrow$ ∂S besteht im Allg. aus mehreren geschl. Wegen,

daher Symbol $\int\limits_{\partial S} \dots$ statt $\oint\limits_{\partial S} \dots$

Alles zusammen:

$$\boxed{\int_{\partial S} d\vec{r}\cdot\vec{f}(\vec{r}) = \iint_S d\vec{A}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{f}(\vec{r})\right) = \iint_S dA\ \vec{n}(\vec{r})\ \mathrm{rot}\,\vec{f}(\vec{r})}$$

Integralsatz von Stokes

Bem:

- Gilt für bel. $\vec{f}(\vec{x})$ (Interpretation als Kraftfeld irrelevant) und bel. Flächen S (sogar mit „Löchern" oder „Fragmenten"). Einzige Voraussetzung: $\vec{f}(\vec{x})$ stetig diff'bar & S sowie ∂S stückweise glatt und gem. „Rechte-Hand-Regel" orientiert.

- $\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0} \quad \forall \vec{x}$ impliziert $\int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = 0 \quad \forall S$.

Damit „Def. & Satz 2" aus Kap. 6.7 vollst. bewiesen

- Falls S selbst sehr klein $\Rightarrow$

$\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x})$ „innerhalb S" praktisch konstant $\Rightarrow$

$$\iint_S d\vec{A} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r})\right) \xrightarrow[\text{für } S \to 0]{} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x})}_{\text{bel. Pkt. in } S} \iint_S d\vec{A} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x})\right) \cdot \vec{S}$$

Mit $\vec{n}_S := \dfrac{\vec{S}}{\underbrace{|\vec{S}|}_{=:S}}$ folgt

$$\underline{\underline{\vec{n}_S \cdot \operatorname{rot} \vec{f}(\vec{x}) = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})}}$$

$\Rightarrow$ „Anschauliche Bedeutung der Rotation":

Wegintegral (z.B. Arbeit) entlang Rand eines infinitesimalen Flächenelements pro Flächeninhalt $\hat{=}$ Rotationkomponente senkrecht zur Fläche.

- Wenn man $\vec{f}(\vec{x}) =: \vec{v}(\vec{x})$ als „Strömungsfeld" interpretiert, dann impliziert $\vec{\nabla} \times \vec{f} \neq \vec{0}$ die Existenz von „Wirbeln", und umgekehrt.

Kurz: Rotation ist Mass für „lokale Wirbelstärke"

Noch kürzer: $\vec{\nabla} \times \vec{f} \;\hat{=}$ „Wirbel von $\vec{f}$"

daher $\vec{\nabla} \times \vec{f} = \vec{0} \Leftrightarrow$ „$\vec{f}$ wirbelfrei" (vgl. S. 6.53)

($\Leftrightarrow \vec{f}$ „Gradientenfeld"; andernfalls: $\vec{f}$ „Wirbelfeld").