Def. & Satz 3:

Falls $\vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{x}) = 0$ heisst $\vec{f}(\vec{x})$ quellenfrei.

Falls $\vec{f}(\vec{x})$ sich schreiben lässt als $\vec{f}(\vec{x}) = \text{rot}\,\vec{A}(\vec{x})$

für ein geeignetes $\vec{A}(\vec{x})$, dann folgt mit Aufg. 32b, RdP1:

$$\text{div}\,\vec{f}(\vec{x}) = \text{div}\left(\text{rot}\,\vec{A}(\vec{x})\right) = 0$$

Beh: Umkehrung gilt ebenfalls, d.h.

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{x}) = 0 \quad \left(\vec{f}\text{ quellenfrei}\right) \Leftrightarrow \vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})}$$

Bem: $\vec{A}(\vec{x})$ (Vektorpotential) nicht eindeutig.

Bew: später.

Bem:

- Sätze 1-3 eng verwandt, aber keiner folgt direkt aus den anderen.

[• Voraussetzungen: $\vec{f}(\vec{x})$ 1-mal, $\phi(\vec{x})$ & $\vec{A}(\vec{x})$ 2-mal stetig diff'bar; $D \subset \mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend, Rand von D stückweise glatt.]

- wichtig z.B. für Elektrodynamik und Hydrodynamik.

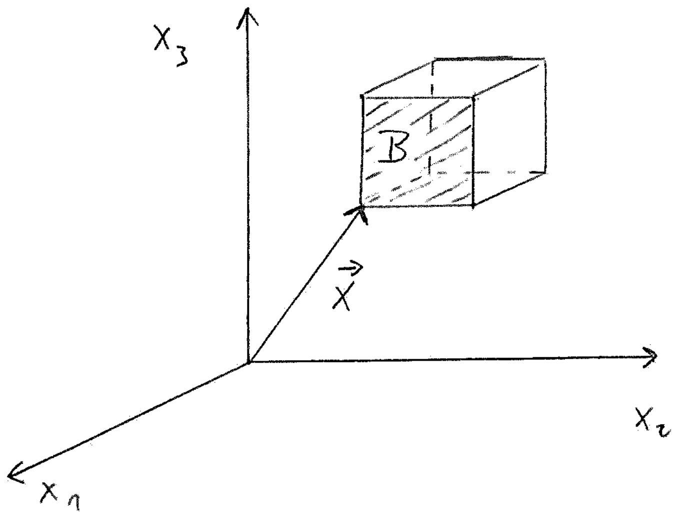
[Dort auch: explizite Bestimmung von ϕ & $\vec{A}$ in $\vec{f} = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\times\vec{A}$ zu gegebenem $\vec{f}$.]

- Beisp: Übungen

6.8 Satz von Gauß

[Lang & Pucker Kap. 7.5 & 9.1, Weltner Kap. 18]

Betrachte Strömung einer Flüssigkeit mit Dichte $\varrho(\vec{x})$ und Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x})$ durch einen Würfel:



Ort $\vec{x}$

Kantenlänge Δ

Volumen $\Delta V = \Delta^3$

Frage: Fluss/Strom (Masse pro Zeit) durch „Vorderfläche B" „aus dem Würfel heraus" ($\Leftrightarrow$ Orientierung der Fläche B)?

Vgl. Kap. 6.4 (Oberflächenintegrale), 2. Sorte (S. 6.37).

Bem: Strom < 0 $\Leftrightarrow$ „in den Würfel hinein"

Antw.: Transfer durch $\mathbb{B}$ in Zeit Δt =

$$= \text{Fläche von } \mathbb{B} \cdot \text{Transportstrecke} \perp \mathbb{B} \quad (\text{d.h.} \parallel x_1)$$

$$= \Delta^2 \cdot v_1(\vec{x})\,\Delta t \quad (\hat{=} \text{ Volumen})$$

$\Rightarrow$ Masse pro Zeit = Dichte · Volumen / Zeit

$$= \rho(\vec{x}) \cdot \Delta^2 \cdot v_1(\vec{x})$$

$$= f_1(\vec{x})\,\Delta^2$$

mit $\vec{f}(\vec{x}) := \rho(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x})$ (sog. Massenstromdichte).

Genauso: Strom durch „Hinterfläche" (gegenüber B)

„aus dem Würfel heraus" =

$$= -f_1(\vec{x}-\vec{e}_1\cdot\Delta)\ \Delta^2$$

(positiv ⟺ Abfluss aus Würfel; negativ ⟺ Zufluss)

⟹ Netto-Durchfluss (= Abfluss − Zufluss) durch 2 Flächen $\perp \vec{e}_1$ =

$$= \Big(f_1(\vec{x}) - \underbrace{f_1(\vec{x}-\vec{e}_1\Delta)}_{\simeq f_1(\vec{x}) - \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1}\cdot\Delta}\Big)\,\Delta^2 \simeq \Delta^3\,\frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1}$$

exakt für $\Delta \to 0$

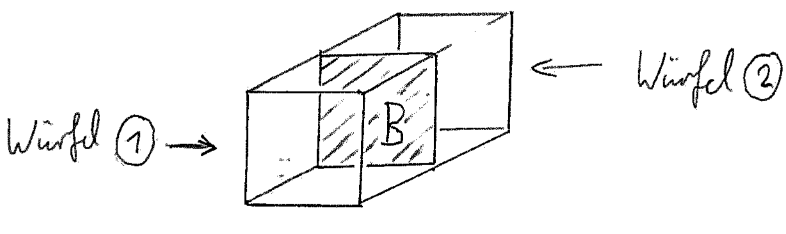
Genauso: „durch Flächen $\perp \vec{e}_2$ und $\perp \vec{e}_3$".

$\Rightarrow$ Netto-Durchfluss (= Abfluss - Zufluss) durch Würfeloberfl. (alle 6 Seiten)

$$= \Delta^3 \left(\frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3(\vec{x})}{\partial x_3} \right)$$

$$= \Delta V \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x})$$

Jetzt: 2 Würfel mit gemeinsamer Grenzfläche B:

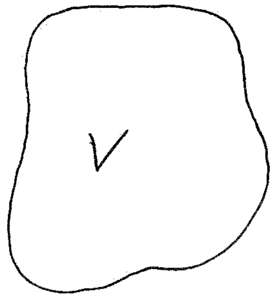


Fluss durch B aus ① heraus = Fluss durch B in ② hinein

= - Fluss durch B aus ② heraus

(und umgekehrt)

Jetzt: bel. Volumen V:



Bezeichnung für <u>Rand- bzw. Oberfläche</u> von V: ∂V

Zerlege V in viele kleine Würfel an den Orten $\vec{x}_k$ [einzeichnen]

$\Rightarrow$ Gesamt-Durchfluss durch alle Würfeloberfl. =

$$= \sum_k \Delta V \; \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x}_k)$$

| wieder: Ströme durch gemeinsame Grenzflächen („innere Trennwände") heben sich weg

= Durchfluss durch alle „Würfel-Aussenwände"

$\simeq$ Durchfluss durch ∂V (exakt für $\Delta V \to 0$)

$$= \iint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \iint_{\partial V} dA \; \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{f}(\vec{r})$$

$\uparrow$

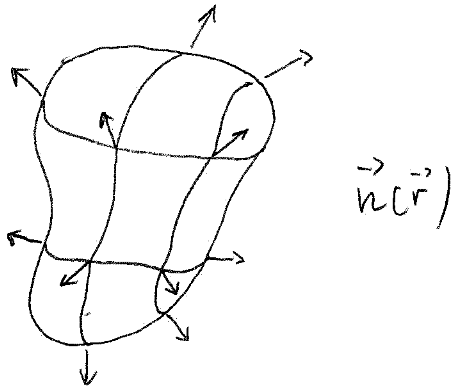
vgl. Kap. 6.4 (Oberflächenintegrale), 2. Sorte (S. 6.39)

Bem:

- Orientierung von ∂V : $d\vec{A}$ bzw. $\vec{n} := \frac{d\vec{A}}{\underbrace{|d\vec{A}|}_{=dA}}$ zeigt

immer „nach aussen"

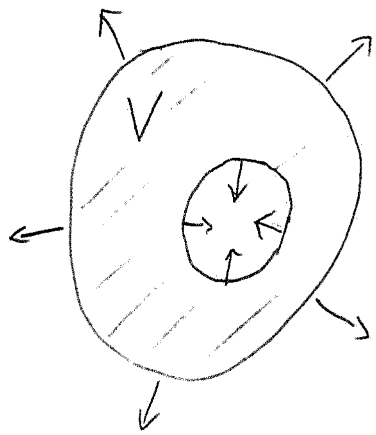
(Abfluss positiv, Zufluss neg.)



- Für „Löcher in V" analog

(∂V besteht dann aus

„mehreren Stücken")



~

Andererseits :

$$\text{Gesamt-Durchfluss} = \sum_k \underbrace{\Delta V}_{=:d^3x} \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{x}_k)}_{=:\phi(\vec{x}_k)} \quad \text{Skalarfeld}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{exakt für } \Delta V \to 0}}{\simeq} \int_V d^3x \; \phi(\vec{x}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{alternative Schreibweise}}}{=} \int_V dV \; \phi(\vec{x})$$

(vgl. Kap. 3.4 (Integration im $\mathbb{R}^n$), S. 3.26)

Alles zusammen :

$$\boxed{\int_V dV \; \vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{x}) = \iint_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{f}(\vec{r}) = \iint_{\partial V} dA \; \vec{n}(\vec{r})\cdot\vec{f}(\vec{r})}$$

<u>Integralsatz von Gauß</u>

<u>Bem:</u>

- Gilt für bel. $\vec{f}(\vec{x})$ (Interpretation als Massenstromdichte irrelevant) und bel. V (sogar mit „Löchern" oder mehreren „Fragmenten").

  Einzige Voraussetzung: $\vec{f}(\vec{x})$ stetig diff'bar & Rand ∂V stückweise glatt und „nach aussen" orientiert.

- Falls V „ohne Löcher" (und „Fragmente"), dann ist ∂V <u>geschlossene Oberfläche</u>

  $\Rightarrow$ statt $\iint\limits_{\partial V}$ oft auch $\oiint\limits_{\partial V}$ oder $\oint\limits_{\partial V}$ geschrieben

  (analog zu $\oint\limits_{C}$ für geschlossene Wege).