6.5 Skalare Felder: Niveauflächen und Gradienten

[Lit.: Weltner Kap. 14.3.2; Lang & Pucker, Kap. 7.4]

Betrachte Skalarfeld $\phi: \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto \phi(\vec{x})$.

Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ heisst $\underline{\underline{N_\lambda := \{ \vec{x} \in D \mid \phi(\vec{x}) = \lambda \}}}$

eine <u>Niveaufläche</u> oder <u>Äquipotentialfläche</u>.

[bzw. -linie für $n=2$ bzw. -hyperfläche für $n \geq 4$]

<u>Beisp:</u> $\phi(\vec{x}) := \dfrac{1}{|\vec{x}|}$, $D := \mathbb{R}^n \setminus \vec{0}$ $\Longrightarrow$

„ohne"

$\phi(\vec{x}) \overset{!}{=} \lambda \iff |\vec{x}| \overset{!}{=} 1/\lambda$ $\Longrightarrow$

N_λ Kreis für $n=2$, Kugelfläche für $n=3$,

„Hyperkugelfläche" für $n \geq 4$ (falls $\lambda > 0$;

andernfalls: $N_\lambda = \{\}$).

<u>Ganz allg.:</u> $N_\lambda \mathrel{\hat{=}}$ $n-1$-dim. „Hyperfläche" $\subset \mathbb{R}^n$

[ev. auch leer oder sonstige untypische Ausnahme].

Defs.:

[mit oder ohne Klammern]

- $$\underline{\underline{\operatorname{grad}\left(\phi(\vec{x})\right) := \underbrace{\vec{e}_k \cdot \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial x_k}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}}}$$

sog. Gradientenfeld (ist VF!) oder Gradient (von $\phi(\vec{x})$), vgl. Übungen RdP1.

- $$\underline{\underline{\vec{\nabla} := \underbrace{\vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}}} \underbrace{= \nabla = \vec{\partial} = \vec{e}_k \partial_k = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}}_{\text{alternative Schreibweisen}}$$

sog. Nabla-Operator

Folgerungen:

- $$\underline{\underline{\operatorname{grad} \phi(\vec{x}) = \vec{\nabla} \phi(\vec{x})}}$$

- Totale Ableitung (vgl. RdP1, Kap. 3.1, 5.3.9)

Weg

$$\underline{\underline{\frac{d}{dt} \phi(\vec{x}(t))}} \overset{\text{„Kettenregel"}}{=} \underbrace{\frac{\partial \phi(\vec{x}(t))}{\partial x_k} \cdot \frac{d x_k(t)}{dt}} = \underline{\underline{\vec{\nabla} \phi(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{d\phi(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \cdot d\vec{x}}$$ sog. <u>totales Differential</u>

↳ $\phi(\vec{x}+d\vec{x}) - \phi(\vec{x})$ für $d\vec{x} \to \vec{0}$

$\hat{=}$ „infinit. Feldänderung bei Ortänderung $d\vec{x}$"

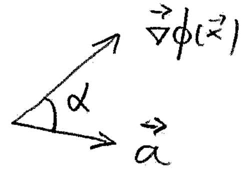
$\sim$

Speziell: $\vec{x}_a(t) := \vec{x} + \vec{a} \cdot t$, $\vec{x}, \vec{a}$ bel. aber fest, $|\vec{a}| = 1$,

t variabel $\Rightarrow$ $\vec{x}_a(t)$ ist Weg bzw. Gerade

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\left.\frac{d\phi(\vec{x}_a(t))}{dt}\right|_{t=0} = \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \cdot \vec{a}}}$$ sog. <u>Richtungsableitung</u>

$$= |\vec{\nabla}\phi(\vec{x})| \cdot \underbrace{|\vec{a}|}_{=1} \cdot \cos\alpha$$



$\hat{=}$ „Änderung von $\phi(\vec{x})$ in Richtung $\vec{a}$ ",

ist maximal für $\alpha = 0$, d.h. $\vec{a} \parallel \vec{\nabla}\phi(\vec{x})$ $\Rightarrow$

<u>$\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$ zeigt in Richtung maximaler Zunahme von $\phi(\vec{x})$</u> ,

$\vec{a} \perp \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \Leftrightarrow$ „ $\phi(\vec{x})$ ändert sich nicht " $\Rightarrow$

<u>$\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$ steht senkrecht zur Niveaufläche durch $\vec{x}$.</u>

Beisp:

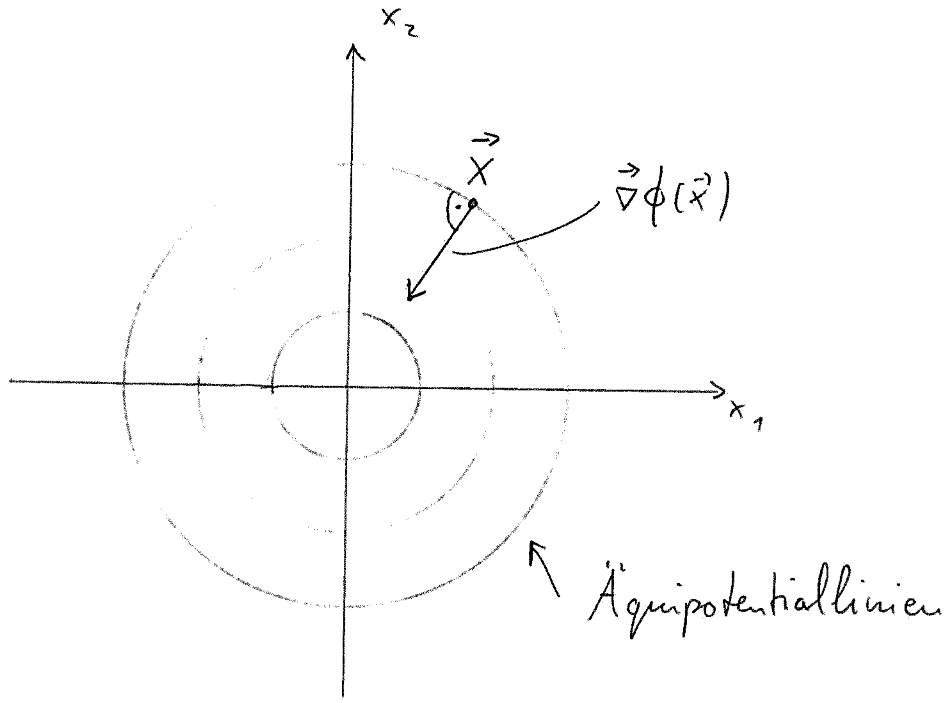
$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|} = \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial x_k} = -\frac{1}{2}\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)^{-3/2} \cdot 2x_k$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) = \vec{e}_k \cdot \underbrace{\frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial x_k}} = \vec{e}_k \underbrace{\frac{-x_k}{|\vec{x}|^3}} = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = -\frac{1}{|\vec{x}|^2}\vec{e}_x$$

$$\vec{e}_x := \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

Skizze für $n=2$:



Weitere Beisp: Übungen

6.6 Wegintegral eines Gradientenfeldes

Im Allg. hängt $\int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})$ von gesamter Raumkurve $\mathcal{C}$ ab.

Jetzt speziell:

$$\underline{\underline{\vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x})}} \qquad (\text{„Gradientenfeld"})$$

Beisp: $\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}U(\vec{x})$ („Potentialkraft")

$\uparrow$ Konvention; U: pot. Energie, Potential (d.h. $U := -\phi$)

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \, \underbrace{\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}(t))}_{\frac{d}{dt}\phi(\vec{r}(t)) \text{ (totale Abl.)}}}_{=: \int_{\mathcal{C}} d\phi(\vec{r}) \text{ [andere Schreibweise]}} = \phi(\vec{r}(t)) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2}$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} d\phi(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1)}$$

<u>Nur von den Endpkten $\vec{r}_{1,2} := \vec{r}(t_{1,2})$ von $\mathcal{C}$ abhängig,</u>

<u>nicht vom Verlauf dazwischen!</u> (gilt für bel. $\mathcal{C}$)

$\overset{\text{per Def.}}{\Longleftrightarrow}$ <u>„Integral ist wegunabhängig"</u>

Umkehrung: $\underline{\underline{\text{Falls } \int_C d\vec{r}\cdot\vec{f}(\vec{r}) \text{ wegunabh.}}}$, dann

$\underline{\underline{\text{ist } \vec{f}(\vec{x}) \text{ ein Gradienfeld}}}$, d.h. es ex. ein

Skalarfeld $\phi(\vec{x})$ mit $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x})$.

in Vorlesung weggelassen

Bew: [Sei $\vec{x}$ bel. aber fest. Wähle irgend einen Weg $\vec{r}(t)$, der von einem

festen $\vec{x}_0$ nach $\vec{x}$ führt, d.h. $\vec{r}(t_0) = \vec{x}_0$, $\vec{r}(t_1) = \vec{x}$.

Def: $\phi(\vec{x}) := \int_C d\vec{r}\cdot\vec{f}(\vec{r})$ [„wohldef.": nur von $\vec{x}$ abh.]

$\Rightarrow \phi(\vec{r}(t)) = \int_{t_0}^{t} dt' \, \dot{\vec{r}}(t')\cdot\vec{f}(\vec{r}(t')) \quad \forall t$ [$\vec{x}$ bel. aber fest]

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\phi(\vec{r}(t)) = \dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{f}(\vec{r}(t)) \quad \forall t$ [Hauptsatz der Int.-Rechnung]

$\parallel$ tot. Abl.

$\dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{\nabla}\phi(\vec{r}(t))$

$$\overset{t=t_1}{\Rightarrow} \dot{\vec{r}}(t_1)\cdot\Big(\vec{\nabla}\phi(\underbrace{\vec{r}(t_1)}_{\vec{x}}) - \vec{f}(\underbrace{\vec{r}(t_1)}_{\vec{x}})\Big) = 0$$

Muss für jeden Weg $\vec{r}(t)$ von $\vec{x}_0$ nach $\vec{x}$ gelten $\Rightarrow \dot{\vec{r}}(t_1)$ bel. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}) \overset{!}{=} \vec{0} \Rightarrow \vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \; \forall \vec{x}$ q.e.d.]

Bem: $\phi(\vec{x})$ nur bis auf additive Konstante festgelegt

[$\Rightarrow$ „Integrationskonstante" $\Leftrightarrow$ $\vec{x}_0$ frei wählbar

$\Leftrightarrow$ $\phi(\vec{x})$ ist eine Art „Stammfkt." von $\vec{f}$, sog. „Potential"]

Fazit: $\vec{f}(\vec{x})$ Gradientenfeld $\Leftrightarrow$ $\int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})$ wegunabh. $(\forall\, \mathcal{C})$

$\Leftrightarrow$ $\oint d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = 0$ für alle geschlossenen Wege $\mathcal{C}$

↑

Bew: Übungen

6.7 Divergenz und Rotation von Vektorfeldern

Betrachte VF

$$\vec{f} : \mathbb{R}^3 \supset D \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{x} = \underbrace{\vec{e}_k x_k}_{k=1,2,3} \longmapsto \vec{f}(\vec{x}) = \underbrace{\vec{e}_k f_k(\vec{x})}_{k=1,2,3}$$

und Nabla-Op. $\vec{\nabla} := \underbrace{\vec{e}_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}}_{} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

Defs:

mit oder ohne Klammer

$$\operatorname{div}\left(\vec{f}(\vec{x})\right) := \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x}) = \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3(\vec{x})}{\partial x_3}$$

„Divergenz" (SF)

Skalarfeld

$$\operatorname{rot}\left(\vec{f}(\vec{x})\right) := \vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3(\vec{x})}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

„Rotation" (VF)

vgl. Übungen RdP1; Divergenz sofort auf $\mathbb{R}^n$ übertragbar, nicht aber Rotation.

Def. & Satz 1:

Zu jedem VF $\vec{f}(\vec{x})$ ex. ein SF $\phi(\vec{x})$ („skalares Potential“)

und ein VF $\vec{A}(\vec{x})$ („Vektorpotential“) so, dass

$$\boxed{\vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) + \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})}$$

(Helmholtzscher Hauptsatz der Vektoranalysis).

Bem: $\phi(\vec{x})$ und $\vec{A}(\vec{x})$ nicht eindeutig.

Bew: später.

Def. & Satz 2:

Falls $\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$ heisst $\vec{f}(\vec{x})$ wirbelfrei.

Für ein Gradientenfeld $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x})$ folgt mit Aufg. 32a, RdP1:

$$\text{rot}\,\vec{f}(\vec{x}) = \text{rot}\left(\text{grad}\ \phi(\vec{x})\right) = \vec{0}.$$

Beh.: Umkehrung gilt ebenfalls, d.h.

$$\boxed{\vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \ (\vec{f} \text{ Gradientenfeld}) \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0} \ (\vec{f} \text{ wirbelfrei})}$$

$\Leftrightarrow \int_C d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})$ wegunabh.

Kap. 6.6

$\Leftrightarrow \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = 0$ für alle geschlossenen Wege C

Bem: $\phi(\vec{x})$ (skalares Potential) nicht eindeutig.

Bew: später.