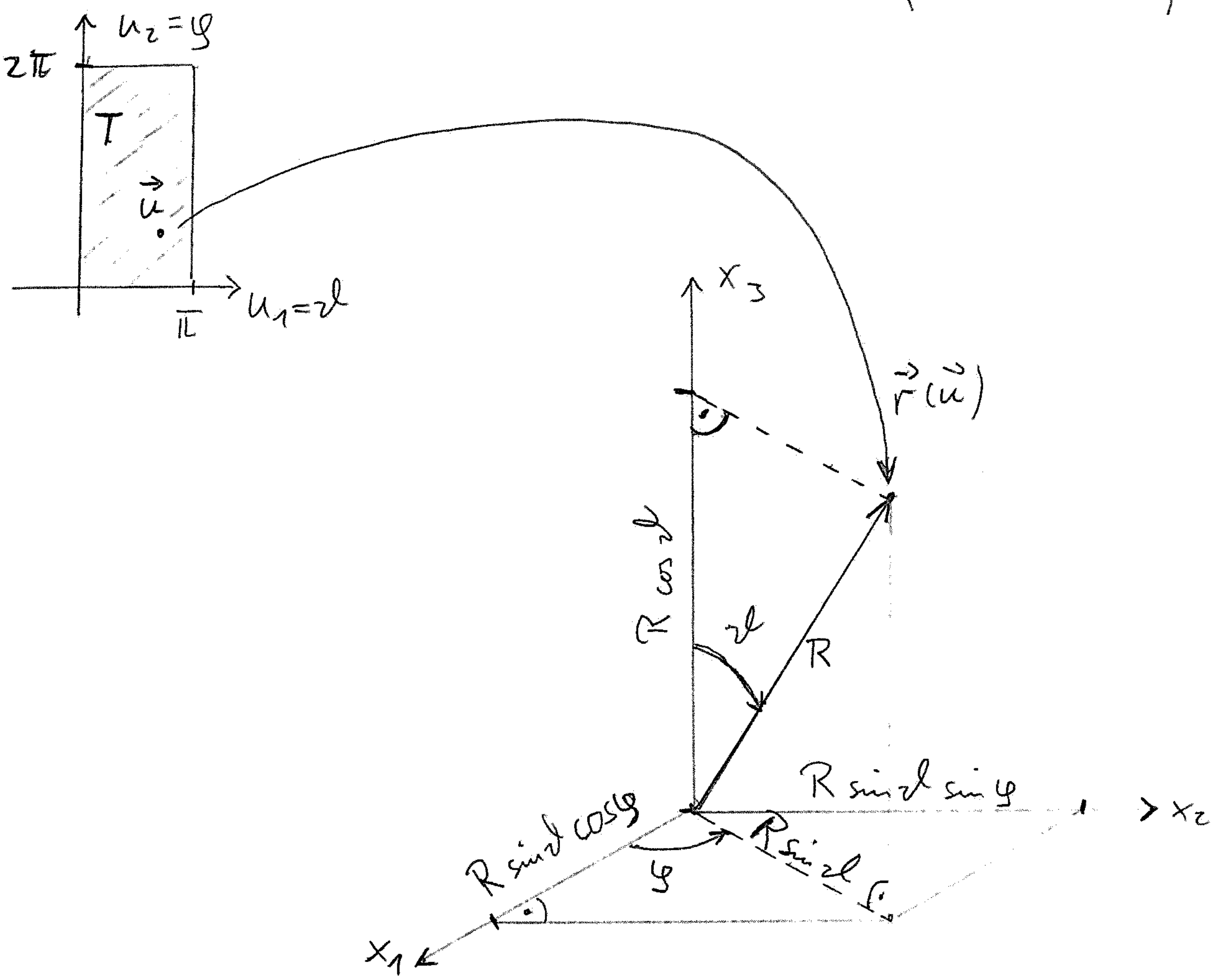
2. Beisp: Kugeloberfläche im $\mathbb{R}^3$ (Radius R)

$$\vec{r}: T := [0, \pi] \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 \to B \subset \mathbb{R}^3$$

$$\vec{u} := \begin{pmatrix} u_1 =: \vartheta \\ u_2 =: \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \vec{r}(\vartheta, \varphi) := \begin{pmatrix} R \sin\vartheta \cos\varphi \\ R \sin\vartheta \sin\varphi \\ R \cos\vartheta \end{pmatrix}$$



$$\left.\begin{array}{ll} R & \text{Radius} \\ \vartheta & \text{Polarwinkel} \\ \varphi & \text{Azimutalwinkel} \end{array}\right\} \underline{\underline{\text{Kugelkoordinaten}}}$$

Klar: ist bijektiv, d.h.

zu jedem Pkt. auf Kugeloberfl. gehört ein und nur ein Paar $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$

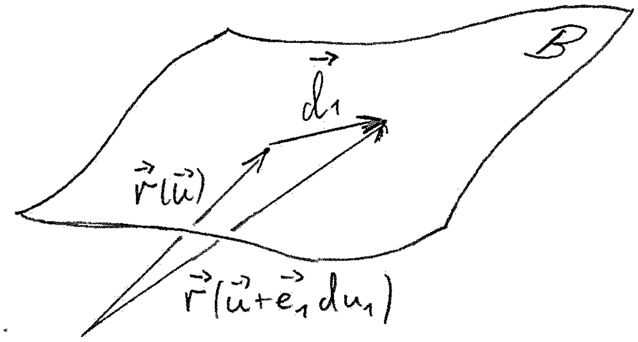
6.4 Oberflächenintegrale

Es geht um „Integrale über Flächenstücke B",

dabei gibt es wieder verschiedene „Sorten"

(vgl. Kap. 6.2 „Wegintegrale")

1. Sorte: „Flächeninhalt" A_B von $B \subset \mathbb{R}^3$:



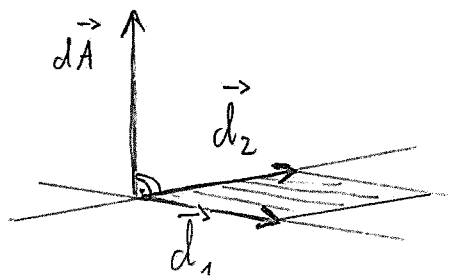
- $\vec{d}_1 = \vec{r}(\vec{u}+\vec{e}_1 du_1) - \vec{r}(\vec{u}) \simeq \dfrac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_1} du_1$

  ↑ vgl. Kap. 3.1, exakt für $du_1 \to 0$

- genauso $\vec{d}_2 \simeq \dfrac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_2} du_2$

- <u>vektorielles Flächenelement</u> $d\vec{A} := \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 \simeq \dfrac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_1} \times \dfrac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_2} du_1 du_2$

  (exakt für $du_{1,2} \to 0$)



- $dA := |d\vec{A}|$ infinit. Flächeninhalt, Flächenelement

· Summation über alle Flächenelemente ⇒

$$\underline{\underline{\text{Gesamtfläche } A_B = \iint_B dA := \iint_T du_1\, du_2 \left| \frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_2} \right|}}$$

↑

andere Schreibweise für A_B

„gewöhnliches 2-dim. Integral", vgl. Kap. 3.4

↑

daher „$\iint$"

$$\left(W: \; S_C = \int_C ds \; := \int_I dt \; |\dot{\vec{r}}(t)| \right)$$

$$\int_I = \int_{t_1}^{t_2}$$

$\sim$

Beisp: Kugeloberfläche

$$\vec{r}\,(\underset{\substack{\updownarrow\\ u_1}}{\vartheta},\underset{\substack{\updownarrow\\ u_2}}{\varphi}) = R\begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}, \quad (\vartheta,\varphi)\in T = [0,\pi]\times[0,2\pi)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \overbrace{\vec{r}}^{=\vec{r}(\vartheta,\varphi)}}{\partial\vartheta} = R\begin{pmatrix}\cos\vartheta\cos\varphi\\ \cos\vartheta\sin\varphi\\ -\sin\vartheta\end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = R\begin{pmatrix}-\sin\vartheta\sin\varphi\\ \sin\vartheta\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = R^2\begin{pmatrix}0-(-\sin\vartheta)\sin\vartheta\cos\varphi\\ (-\sin\vartheta)(-\sin\vartheta\sin\varphi)-0\\ \cos\vartheta\sin\vartheta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\end{pmatrix} = R^2\begin{pmatrix}\sin^2\vartheta\cos\varphi\\ \sin^2\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\sin\vartheta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|}} = R^2\Big(\sin^4\vartheta\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1} + \cos^2\vartheta\sin^2\vartheta\Big)^{1/2}$$

$$= R^2\Big(\sin^2\vartheta\underbrace{(\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta)}_{=1}\Big)^{1/2} = \underline{\underline{R^2\sin\vartheta}}$$

$\sin\vartheta\geq 0 \;\; \forall\,\vartheta\in[0,\pi]$

$$\Rightarrow A_B = \iint_T d\vartheta\, d\varphi \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \quad \Big| \text{ vgl. Kap. 3.4}$$

$$= \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \; R^2 \sin\vartheta = R^2 \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot 1}_{\varphi \big|_0^{2\pi} = 2\pi - 0}$$

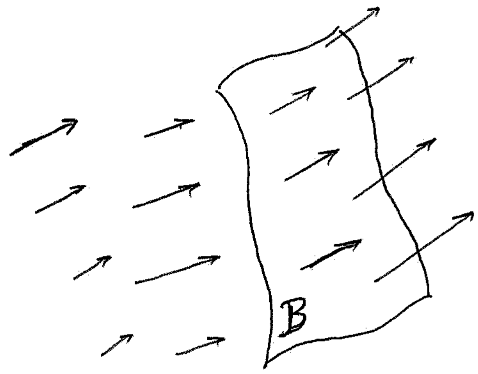
$$= 2\pi R^2 \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta}_{-\cos\vartheta \big|_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2}$$

$$= 4\pi R^2 \quad \checkmark$$

Weitere Beisp: Übungen

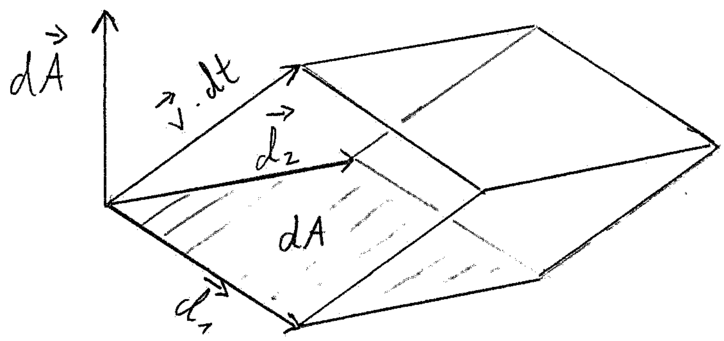
2. Sorte: z.B. Strömung einer Flüssigkeit mit Dichte $\rho(\vec{x})$

und Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x})$



Fluss/Strom (Masse pro Zeit) durch Flächenstück $\mathbb{B}$?

Infinitesimal: [alle Argumente „$\vec{x}$" weggelassen!]



Volumen: $\underbrace{(\vec{d}_1 \times \vec{d}_2)}_{=: d\vec{A} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_1 du_2} \cdot \vec{v}\, dt$ (Spatprodukt)

s. oben

$\Rightarrow$ Masse pro Zeit „durch dA" $\hat{=}\ \underbrace{\rho\,\vec{v}}_{=:\vec{f}} \cdot d\vec{A}$

(exakt für $d\vec{A} \to \vec{0}$)

$$\frac{d\vec{A}}{dA} = \frac{\frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_2}}{\left| \frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_2} \right|} =: \vec{n}(\vec{r}(\vec{u}))$$ (Einheits-) Normalenvektor

$$\left(W:\ \vec{T}(t) := \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} \right)$$

Summation über alle Flächenelemente $\Rightarrow$ Gesamtfluss/-strom

$$\underbrace{\iint_B d\vec{A}\cdot\vec{f}(\vec{r})}_{\text{andere Schreibweise}} = \iint_B dA\, \vec{n}(\vec{r})\cdot\vec{f}(\vec{r}) := \iint_I du_1 du_2 \left(\frac{\partial\vec{r}(\vec{u})}{\partial u_1}\times\frac{\partial\vec{r}(\vec{u})}{\partial u_2}\right)\cdot\vec{f}(\vec{r}(\vec{u}))$$

$$\left(W: \int_C d\vec{r}\cdot\vec{f}(\vec{r}) = \int_I dt\, \dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{f}(\vec{r}(t))\right)$$

Beisp: Übungen

3. Sorte: Oberflächenintegral eines Skalarfeldes $\phi(\vec{r})$ ganz

analog:

$$\iint_B dA\, \phi(\vec{r}) := \iint_T du_1\, du_2 \left| \frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_2} \right| \phi(\vec{r}(\vec{u}))$$

$$\left(W: \int_C ds\, \phi(\vec{r}) = \int_I dt\, |\dot{\vec{r}}(t)|\, \phi(\vec{r}(t)) \right)$$

- Spezialfall: $\phi(\vec{x}) = 1 \;\forall \vec{x} \Rightarrow$ Flächeninhalt (1. Sorte)

- Weitere Sorten: $\iint_B dA\, \vec{f}(\vec{r})$, $\quad \underbrace{\iint_B d\vec{A} \times \vec{f}(\vec{r})}_{dA\,(\vec{n} \times \vec{f})}$, ...

sollte klar sein: „komponentenweise“ $\quad$, $\quad dA\,(\vec{n} \times \vec{f})$

Ohne Bew. (Details nicht ganz einfach!):

Integrale sind wieder unabhängig von Parametrisierung $\vec{r}(\vec{u})$ von B

(unter gewissen Zusatzvoraussetzungen an $\vec{r}(\vec{u})$ analog zu

W: $\vec{r}(t)$ muss „orientierter Weg" sein, mit $|\dot{\vec{r}}(t)| \neq 0 \ \forall t$)

[„Anschaulich": kaum Zweifel mögl. per Konstruktion]