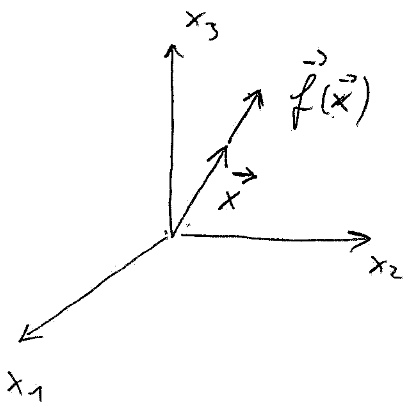
Beisp:

1.) $n = 3$, $\vec{f}(\vec{x}) := \gamma \frac{1}{|\vec{x}|^2} \vec{e}_x$, $\gamma = \text{const.}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$,

$\vec{e}_x := \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ (Einheitsvektor in Richtung von $\vec{x}$)

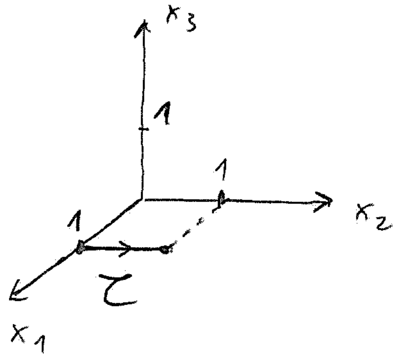


„Zentralkraft" bzw. „radialsymm. $\frac{1}{r^2}$-Kraft",

z.B. Gravitation (Newton), Coulombkraft, ...

$$\Rightarrow \vec{f}(\vec{x}) = \gamma \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = \gamma \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in [0,1]$$



„Gerade"

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{f}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \gamma \frac{1}{(1^2+t^2+0^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma (t^2+1)^{-3/2} \cdot t$$

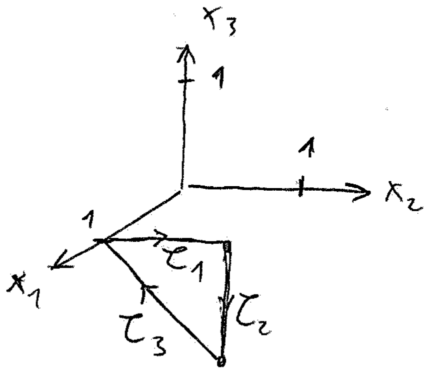
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{W_{\mathcal{C}}}} = \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \; \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{f}(\vec{r}(t)) = \int_0^1 dt \; \gamma (t^2+1)^{-3/2} \cdot t$$

$$= \gamma \left(-(t^2+1)^{-1/2} \right) \Big|_0^1 = \gamma \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1}} \right) = \underline{\underline{\gamma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}}$$

$\Downarrow$

denn: $\quad \frac{d}{dt} (t^2+1)^{-1/2} = -\frac{1}{2} (t^2+1)^{-3/2} \cdot 2t$

2.)



$$\vec{r}_1(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in [0,1] \qquad (\text{wie in } 1.)$$

$$\vec{r}_2(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -t \end{pmatrix} \qquad -\text{''}-$$

$$\vec{r}_3(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \\ -1+t \end{pmatrix} \qquad -\text{''}-$$

$C_k \;\hat{=}\;$ (orientierte) Teilwege $\quad (k = 1,2,3)$

$C := C_1 \oplus C_2 \oplus C_3$ „geschlossener Weg"

↑ „Zusammensetzung" von Wegen

$$\Rightarrow \quad W_C = \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = W_{C_1} + W_{C_2} + W_{C_3}$$

Symbol für geschlossenen Weg

so kann man „komplizierte" Wege zusammensetzen!

$$\underline{W_{C_1} \overset{1.)}{=} \gamma\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$\underline{W_{C_2}} = \int_0^1 dt\, \gamma \left(1^2 + 1^2 + t^2\right)^{-3/2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -t \end{pmatrix} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}^{\dot{\vec{r}}_2(t)}}_{t} = \gamma\left(-\left(t^2+2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \Big|_0^1$$

denn: ... (s. oben)

$$= \underline{\gamma\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$\underline{W_{C_3}} = \int_0^1 dt\, \gamma \Big(1^2 + \underbrace{(1-t)^2 + (-1+t)^2}_{2(t-1)^2} \Big)^{-3/2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \\ -1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{2(t-1)}$$

$$= \gamma\left(-\left(2(t-1)^2 + 1\right)^{-1/2}\right)\Big|_0^1 = \underline{\gamma\left(-\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

denn: ... (s. oben)

$$\Rightarrow \underline{\underline{W_C = 0}}$$

Später: $W_C = 0$ für jeden geschlossenen Weg C!

(und $\vec{f}(\vec{x})$ wie oben $\Rightarrow \vec{0} \overset{!}{\notin} C$)

3. Sorte:

Wegintegral eines Skalarfeldes (SF) $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\vec{x} \mapsto \phi(\vec{x})$

ganz analog definiert:

$$\int_{\mathcal{C}} ds\ \phi(\vec{r}) := \int_{t_1}^{t_2} dt\ |\dot{\vec{r}}(t)|\ \phi(\vec{r}(t))$$

[kein eigenes Symbol wie vorhin $S_{\mathcal{C}}, W_{\mathcal{C}}$]

Bem:

- wieder unabh. von Parametrisierung.
- Spezialfall $\phi(\vec{x}) = 1 \ \forall \vec{x} \Rightarrow$ Wegintegral (1. Sorte).
- nicht so wichtig in Physik $\Rightarrow$ kein Beisp. hier.

[z.B. $\mathcal{C} \mathrel{\hat{=}}$ Polymer, $\phi \mathrel{\hat{=}}$ Dichte = Masse/Länge]

- Weitere Sorten: —"— [z.B. $\int_{\mathcal{C}} ds\ \vec{f}(\vec{r}) := \int_{t_1}^{t_2} dt\ |\dot{\vec{r}}(t)|\ \vec{f}(\vec{r}(t))$ „Komponentenweise"]

6.3 Flächen

Fläche $\vec{r}: \mathbb{R}^2 \supset T \to B \subset \mathbb{R}^n$ $\quad (n \geq 2$, meist $n = 3)$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto \vec{r}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} r_1(u_1, u_2) \\ \vdots \\ r_n(u_1, u_2) \end{pmatrix} = \vec{e}_k \, r_k(\vec{u})$$

[d.h. wieder ein VF!]

(Vgl. mit Weg (Abk. „W"): $\vec{r}(t) = \vec{e}_k \, r_k(t)$)

Flächenstück $B := \{ \vec{r}(\vec{u}) \mid \vec{u} \in T \}$ (Hyperfläche, Hyperebene, ...)

(W: Raumkurve $\mathcal{C} := \{ \vec{r}(t) \mid t \in I \}$)

Namen:

$\vec{u}$ „Parameter"

T „Parameterbereich"

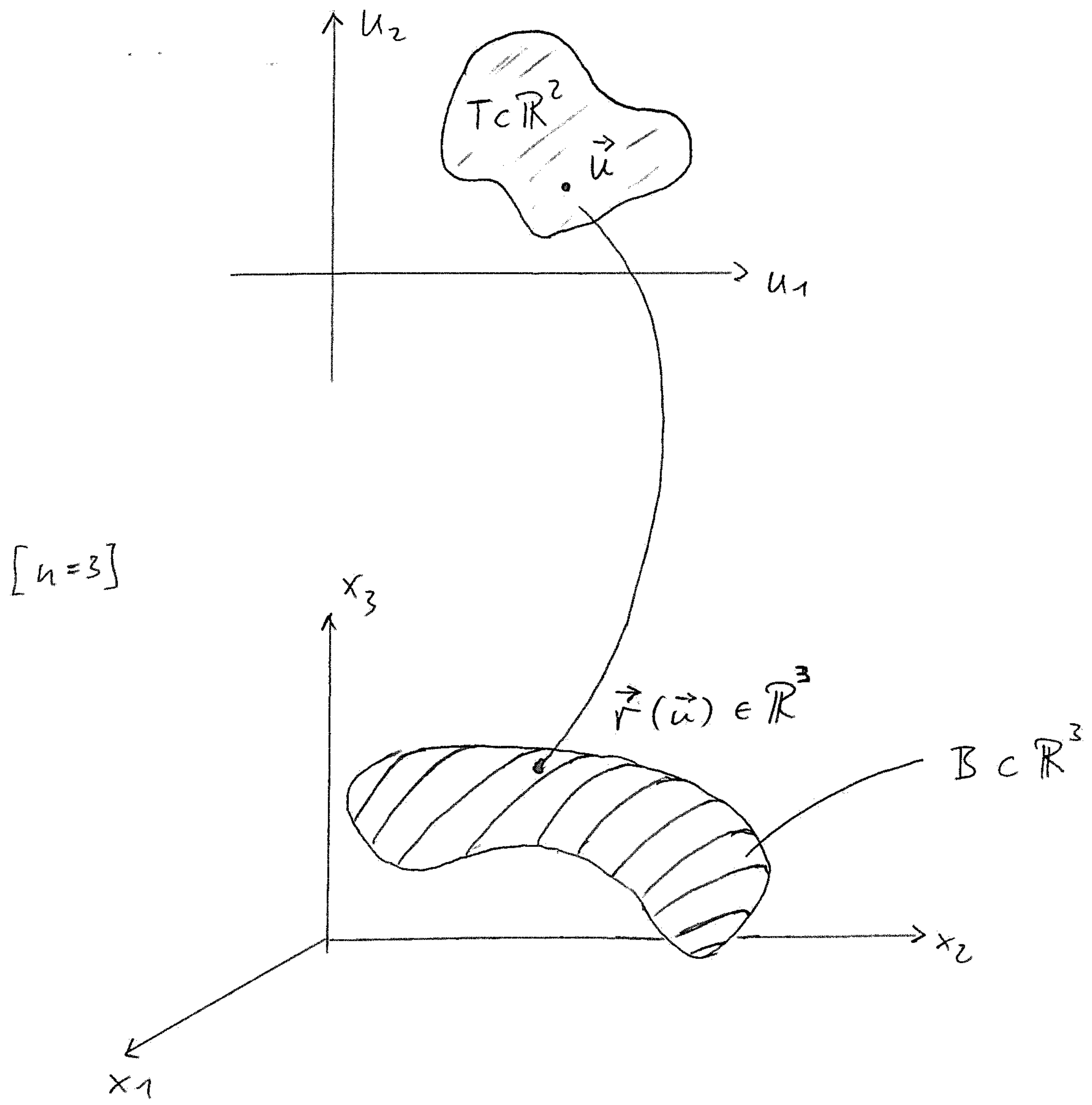
$\vec{r}(\vec{u})$ „Parametrisierung von B" [analog zu W]

Stillschweigende Voraussetzungen:

- T „echt 2-dim." (nicht „Linie", „Pkt.", leer, ...)
- $\vec{r}(\vec{u})$ bijektiv (ein-eindeutig) (W: $\vec{r}(t)$ „kehrt nicht um")
- $\vec{r}(\vec{u})$ hinreichend oft diff'bar [⇒ T & B zusammenhängend]

[alles analog zu W]

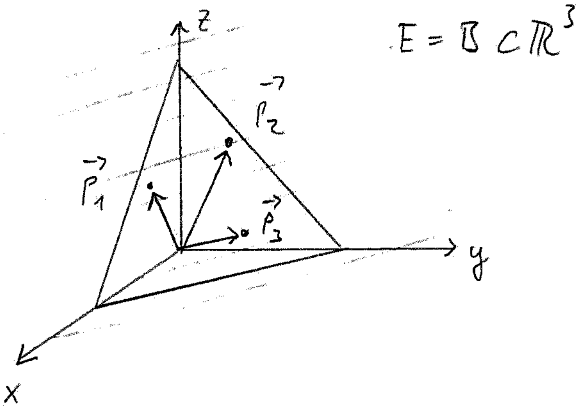
Veranschaulichung



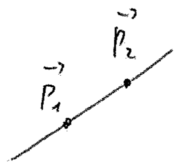
1. Beisp.: [Lang & Pucker Kap. 3.3.3]

Ebene im $\mathbb{R}^3$ ($\Rightarrow$ oft „E" statt „B"). Klar:

(i) E = B durch 3 P'kte bzw. Ortsvektoren $\vec{p}_{1,2,3}$ festgelegt

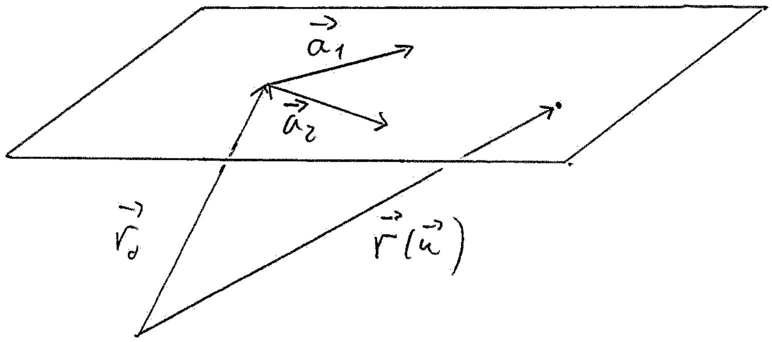


($\vec{p}_{1,2,3} \in E$ beliebig, nur nicht auf einer Linie)

(W: Gerade G durch 2 P'kte )

(ii) Jeder Pkt. in $E = B$ ist von der Form

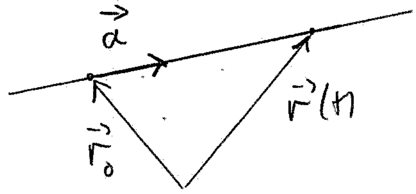
$$\underline{\underline{\vec{r}(u_1, u_2) = \vec{r}_0 + u_1 \vec{a}_1 + u_2 \vec{a}_2}} \quad , \; u_{1,2} \in \mathbb{R}$$



- $\vec{r}_0 \in E$ beliebig (z.B. $\vec{p}_1$) : sog. Stützpkt./Stützvektor
- $\vec{a}_{1,2}$ zwei sog. Richtungsvektoren (z.B. $\vec{p}_2 - \vec{p}_1$ und $\vec{p}_3 - \vec{p}_1$),

nicht parallel und nicht $\vec{0}$, ansonsten beliebig. $[\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq \vec{0}]$

($W: \; \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{a}$



)

$\Leftrightarrow \quad \vec{r} : T = \mathbb{R}^2 \to B = E \subset \mathbb{R}^3$

$$\vec{u} \mapsto \vec{r}(\vec{u}) = \vec{r}_0 + u_1 \vec{a}_1 + u_2 \vec{a}_2$$

(klar: ist bijektiv)

- Viele verschiedene $(\vec{r}_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2)$ bzw „Parametrisierungen" $\vec{r}(\vec{u})$ von B möglich.

($\Leftarrow$: analog)

- Im $\mathbb{R}^n$: alles genauso. (Aber jetzt weitere „Hyperebenen" der Form

$$\vec{r}(u_1, \dots, u_m) = \vec{r}_0 + \sum_{k=1}^{m} u_k \vec{a}_k \quad , \quad m = 3, 4, \dots, n-1 .$$

Hier nicht weiter behandelt).

(iii)

- Definiere

Kreuzprod.

$\vec{n} := \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ sog. Normalenvektor $\left(\neq \vec{0}\,,\ \perp \vec{a}_{1,2} \Rightarrow \perp E \right)$

$\vec{e}_n := \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ (normiert)

$\Rightarrow \vec{r}(\vec{u}) \cdot \vec{n} = \left(\vec{r}_0 + u_1 \vec{a}_1 + u_2 \vec{a}_2 \right) \cdot \vec{n} = \vec{r}_0 \cdot \vec{n} + \vec{0} + \vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\vec{r}(\vec{u}) - \vec{r}_0 \right) \cdot \vec{n} = 0 \quad \forall\, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ bzw $\underline{(\vec{x} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0 \quad \forall\, \vec{x} \in E}$

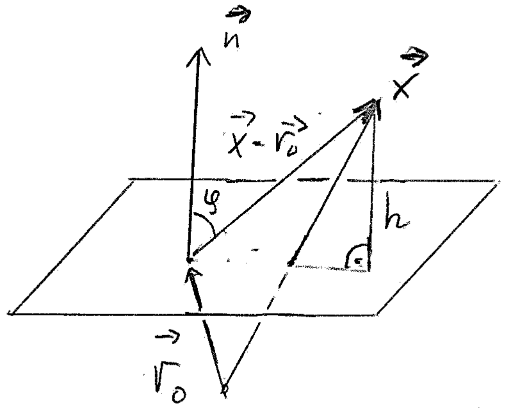
sog. <u>Hessesche Normalform</u> (für jedes $\vec{r}_0 \in E$!)

- Definiere $\vec{n} := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $q := \vec{r}_0 \cdot \vec{n}$, $\Rightarrow$

$\underline{a\, x_1 + b x_2 + c \cdot x_3 = q}$ sog. <u>Ebenengl.</u>

$\Leftrightarrow \mathbb{B} = E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a x_1 + b x_2 + c x_3 = q \right\}$ („Lösungsmenge"!)

- Abstand d eines P'ktes $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ von der Ebene E ?



$$h = |\vec{x}-\vec{r_0}| \cdot \cos\varphi$$

$$(\vec{x}-\vec{r_0}) \cdot \vec{n} = |\vec{x}-\vec{r_0}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\varphi = h \cdot |\vec{n}| \ , \quad d = |h|$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{d = |(\vec{x}-\vec{r_0}) \cdot \vec{e_n}|}} \qquad (\text{für jedes } \vec{r_0} \in E \text{; } d=0 \Leftrightarrow \text{Hesse})$$