14. 2 Wegintegrale [Lit.: Weltner, Kap. 16]

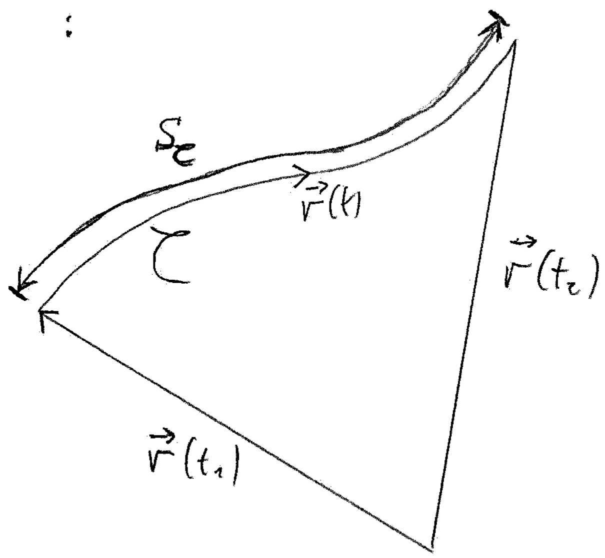
Auch Linienintegrale, Kurvenintegrale, ... genannt.

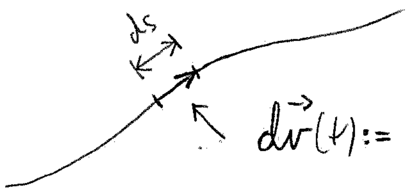
Es geht immer um gewisse „Integrale entlang von Raumkurven“,

aber es gibt verschiedene „Sorten“:

1. Sorte :

Bogenlänge von $\mathcal{C}$:





$d\vec{r}(t) := \dot{\vec{r}}(t)\,dt \simeq \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)$ (vgl. S. 6.8)

$\nwarrow$ exakt für $dt \to 0$

$ds := |d\vec{r}(t)| = |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt \;\hat{=}$ „während dt zurückgelegte (Teil-)Strecke" (exakt für $dt \to 0$)

$$\Rightarrow \quad \underbrace{S_\mathcal{C} = \int_{t_1}^{t_2} dt \; |\dot{\vec{r}}(t)|}_{= ds \text{ (siehe oben)}} \quad \hat{=} \text{ „Summe aller Teilstrecken" (vgl. Kap 3.4)}$$

$\Rightarrow$ andere Schreibweise $\underline{\underline{S_\mathcal{C} =: \int_\mathcal{C} ds}}$

oder auch $\int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt$

Für eine beliebige andere Parametisierung

$\vec{y}(\tau) = \vec{r}(t(\tau))$ von $\mathcal{C}$ folgt:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, |\underbrace{\dot{\vec{y}}(\tau)}| = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, \frac{dt(\tau)}{d\tau} \, |\dot{\vec{r}}(t(\tau))| =$$

| Substitution bzw Variablentrafo von τ auf t [Rückwärts]

$$\frac{d}{d\tau} \vec{r}(t(\tau)) = \dot{\vec{r}}(t(\tau)) \cdot \underbrace{\frac{dt(\tau)}{d\tau}}_{\geq 0}$$ [Kettenregel]

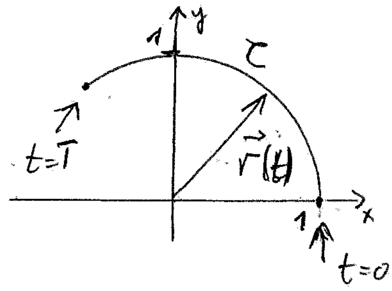
$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \, |\dot{\vec{r}}(t)| = S_{\mathcal{C}}$$

$\Rightarrow$ <u>$S_{\mathcal{C}}$ ist unabh. von der Parametisierung von $\mathcal{C}$.</u>

[wie man es erwarten sollte! Nur Eigenschaft von $\mathcal{C}$ alleine]

Beisp:

1.) $n=2$, $\vec{r}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0,T]$



„Kreisbogen" [Radius 1]

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$|\dot{r}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_C}} = \int_0^T dt \, \underbrace{|\dot{\vec{r}}(t)|}_{=1} = t \Big|_0^T = \underline{\underline{T}}$$

[wie erwartet: Bogenlänge = Bogenmass]

.6.13

2.) $n=2, \quad \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} \cos(t^3) \\ \sin(t^3) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \sqrt[3]{T}]$

$\Rightarrow$ selben $\mathcal{C}$ wie in 1.), aber andere Parametrisierung $\vec{r}(t)$!

[könnte man auch $\vec{y}(\tau)$ nennen]

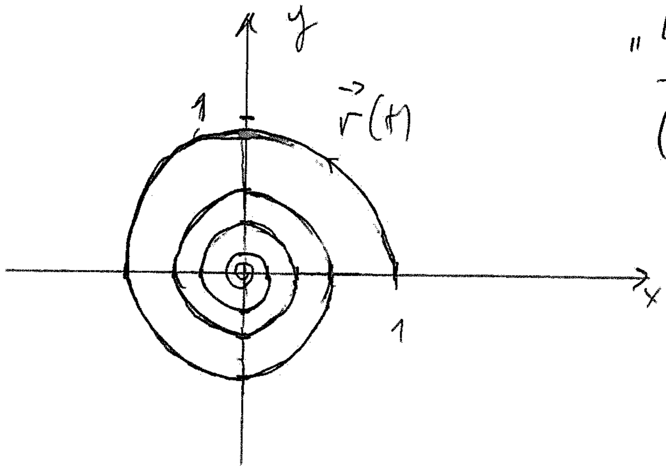
$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t^3) \cdot 3t^2 \\ \cos(t^3) \cdot 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{[3t^2 \sin(t^3)]^2 + [3t^2 \cos(t^3)]^2} = \sqrt{9t^4 \underbrace{[\sin^2(t^3) + \cos^2(t^3)]}_{=1}} =$$

$$= 3t^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\int_{\mathcal{C}}}} = \int_0^{\sqrt[3]{T}} dt \cdot 3t^2 = t^3 \Big|_0^{\sqrt[3]{T}} = \underline{\underline{T}} \quad \checkmark$$

3.) $\vec{r}(t) := e^{-at}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\quad, t\in[0,T]$



„logarithmische Spirale"

(für $a=0{,}1$ skizziert)

$[e^{-0{,}1\cdot 2\pi}\simeq 0{,}53]$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = e^{-at}(-a)\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} + e^{-at}\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-at}(-a\cos t-\sin t)\\ e^{-at}(-a\sin t+\cos t)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{(e^{-at})^2\underbrace{\Big[\underbrace{(-a\cos t-\sin t)^2}_{a^2\cos^2 t+\cancel{2a\cos t\sin t}+\sin^2 t}+\underbrace{(-a\sin t+\cos t)^2}_{a^2\sin^2 t-\cancel{2a\sin t\cos t}+\cos^2 t}\Big]}_{a^2+1}}$$

$$= e^{-at}\sqrt{1+a^2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_c}} = \int_0^T dt\, e^{-at}\sqrt{1+a^2} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{-a}\underbrace{e^{-at}\Big|_0^T}_{e^{-aT}-1} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\left(1-e^{-aT}\right)}}$$

• Bleibt endlich für $T\to\infty$! (falls $a>0$)

Weitere Beisp.: Ü

[„Problem": $\int_{t_1}^{t_2} dt\, |\dot{\vec{r}}(t)|$ oft nicht „geschlossen" lösbar!]

2. Sorte:

Gegeben: VF $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $[m=n]$ & Weg $\vec{r} : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$
$\vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x})$

Def:

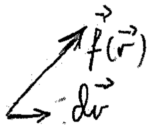
$$W_C := \int_{t_1}^{t_2} dt \; \underbrace{\dot{\vec{r}}(t)}_{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}} \cdot \vec{f}(\vec{r}(t)) \quad \text{oder auch} = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{f}(\vec{r}(t))}_{\text{oder } \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)} dt$$

Andere Schreibweisen:

$$\int_C \underbrace{d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})}_{\text{oder } \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} = \int_C dr_k \, f_k(\vec{r})$$

Name: Linienintegral

Beisp.: $n = 3$, $\vec{f}(\vec{x}) \;\hat{=}\;$ „Kraftfeld" ...

Physik: 

Arbeit := „Weg × Kraft in Richtung des Weges" $\Rightarrow$

$d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) \;\hat{=}\;$ „Arbeit entlang Wegstück $d\vec{r}$" (exakt für $d\vec{r} \to \vec{0}$)

$$dt \; \underbrace{\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{f}(\vec{r})}_{\text{„Leistung } \hat{=} \text{ Kraft × Geschw."}} \;\hat{=}\; \text{„während } dt \text{ geleistete Arbeit"}$$

$\Rightarrow W_{\mathcal{C}} \;\hat{=}\;$ „Summe aller Teil-Arbeiten"

$\hat{=}$ <u>gesamte Arbeit entlang $\mathcal{C}$</u> $\to$ **w**ork

Wieder: [vgl. S. 6.11]

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \; \underbrace{\dot{\vec{y}}(\tau)}_{\dot{\vec{r}}(t(\tau))\cdot\frac{dt(\tau)}{d\tau}} \cdot \vec{f}(\underbrace{\vec{y}(\tau)}_{\vec{r}(t(\tau))}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \; \dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{f}(\vec{r}(t))$$

$\Rightarrow$ <u>$W_{\mathcal{C}}$ ist unabh. von Parametrisierung von $\mathcal{C}$,</u>

[nur Eigenschaft von $\mathcal{C}$ & $\vec{f}$ alleine.]

Daher <u>Schreibweise</u> <u>$\int_{\mathcal{C}} d\vec{r}\cdot\vec{f}(\vec{r})$</u> [siehe oben],

aber um „<u>wirklich</u> zu <u>rechnen</u>" ist <u>$\int_{t_1}^{t_2} dt\; \dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{f}(\vec{r}(t))$</u>

<u>besser geeignet!</u>