5.8 Anmerkungen

1.) Man kann beweisen: Lösung einer DGl. n-ter Ordn. mit n Anfangsbed. existiert und ist <u>eindeutig</u> unter sehr schwachen Voraussetzungen, die in der Physik <u>prakt. immer</u> erfüllt sind $\Rightarrow$

2.) Falls „irgendwie" eine Lösung gefunden (Ansatz, Raten, Bücher, KI, ...) kann es keine weitere Lösung geben!
[man hat nichts „verpasst", Rechtfertigung von Ansatz, ... (Gisela)]

3.) Viele weitere Typen von DGl'en und „Lösungsmethoden" weggelassen. Für viele DGl'en ist aber <u>keine</u> solche Methode bekannt!
(aber Lsg existiert, vgl. 1.)

4.) Grundgesetze der Physik: DGl'en.

Hauptaufgabe: deren Lösung. [„Integration"]

5.9 Ausblick: partielle DGl'en

Einfachstes Beisp:

Finde Fkt $f(x,t)$ mit

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -\underset{\substack{\uparrow \\ \text{const.} \in \mathbb{R}}}{c} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$$

Beh: $f(x,t) = g(x-ct)$ ist Lösung für beliebige (diff'bare)

Fkt. $g(x)$.

Bew: $$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} g(x-ct) \overset{x \text{ „konst."; Kettenregel}}{=} g'(x-ct) \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}(x-ct)}_{=-c},$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} g(x-ct) = g'(x-ct) \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}(x-ct)}_{=1} \qquad \text{q.e.d.}$$

D.h. in der „allg. Lösung" ist nicht mehr nur eine (oder mehrere)

Konstanten „frei wählbar", sondern eine ganze Fkt!

Z.B. kann man $f(x,t)$ für $t=0$ „vorgeben":

[DGl. sagt nur, wie es dann „weitergeht",

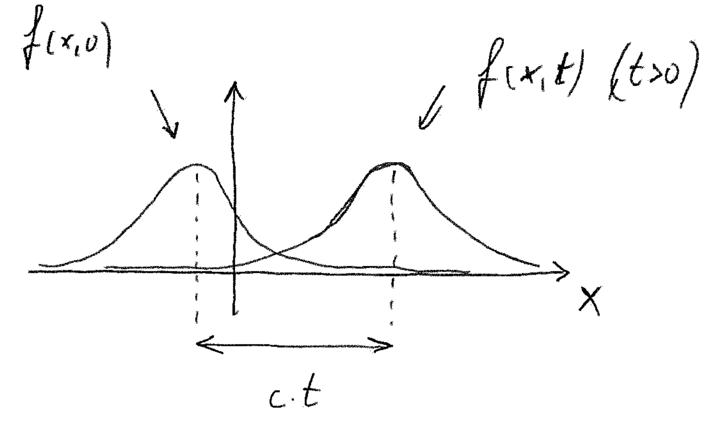
wie es „losgeht" muss man selber sagen!]

$$f(x,0) \overset{!}{=} f_0(x) \quad \forall x \qquad [\, f_0 \text{ bel. aber fest „vorgegeben"} \,]$$

‖ siehe oben!

$g(x)$ [d.h. $g(x)$ jetzt eindeutig festgelegt]

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x,t) = f_0(x-ct)}} \quad \forall x,t$$



d.h. $c \mathrel{\hat{=}}$ „<u>Ausbreitungsgeschw.</u>" (der „Struktur"/„Info" von $f(x,0)$)

~

[dieses Beisp. war extrem einfach!]

Im Allg. sind partielle DGl'en noch „schwieriger" zu lösen als

gewöhnliche → Theorie-Vorlesungen [Elektrodyn., Quantenmech., Hydrodyn., ...]

6 Vektoranalysis

Wiederholung (Kap. 1):

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \vec{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \;\middle|\; v_k \in \mathbb{R}\,,\; k = 1, \dots, n \right\}$$ [Menge von Vektoren]

Alternativ: $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$

Algebr. Struktur:

$$\vec{u} + \vec{v} := \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \vec{v} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix} \quad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n,\, \lambda \in \mathbb{R}$$

[komponentenweise]

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n$ wird n-dim. Vektorraum (VR).

Mit $\vec{e}_k := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ k-te Komponente folgt

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot \vec{e}_k \overset{\vec{v}\cdot\lambda := \lambda\vec{v}}{=} \sum_{k=1}^{n} \vec{e}_k \, v_k$$

$\{\vec{e}_k\}_{k=1}^{n}$ heisst (eine) Basis (von $\mathbb{R}^n$) bzw. „Kartesisches Koordinatensystem".

Im $\mathbb{R}^3$ auch $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ oder $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Skalarprodukt

$\vec{u} \cdot \vec{v} := \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$ $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n$ wird ein Hilbertraum (HR).

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ „orthogonal" (senkrecht, $\vec{u} \perp \vec{v}$) $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ $[\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}]$

$\Rightarrow$ $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (Kronecker) $[\vec{e}_k$ paarweise orthogonal$]$

Betrag, Norm, (Euklid'sche) Länge:

$$|\vec{v}| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2} = \sqrt{\underset{\uparrow \atop \vec{v}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^2}}$$

$\vec{v}$ Einheitsvektor (normierter Vektor) $\Leftrightarrow$ $|\vec{v}| = 1$.

z.B. $|\vec{e}_k| = 1$ $\forall k$

$\Rightarrow$ $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^{n}$ heisst (eine) „Orthonormalbasis" (ONB).

Einstein'sche Summenkonvention:

„über doppelt vorkommende Indizes wird summiert".

Beisp:

- $u_k v_k := \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$ (oft auch „$\underbrace{u_k v_k}$")

  $\Leftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = u_k v_k$

- $\vec{v} = v_k \vec{e}_k = \vec{e}_k v_k$

- $|\vec{v}| = \sqrt{v_k v_k}$

Ist „elegant" aber manchmal „missverständlich".

[$\Rightarrow$ wir werden die Konvention nur gelegentlich verwenden]

6.1 Wege und Raumkurven

Dasselbe wie „vektorwertige Fkt'en" (Kap. 2) ...

„Teilmenge"

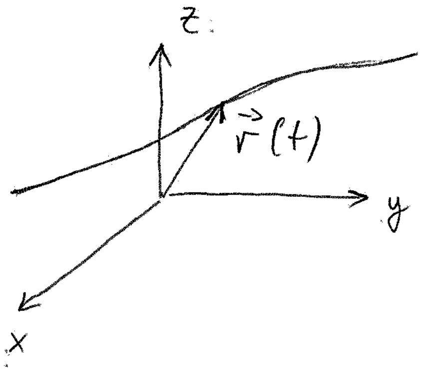
$\vec{r}: I \to \mathbb{R}^n \quad , \quad I := [t_1, t_2] \subset \mathbb{R} \quad , \quad t_1 \leq t_2$

$$t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} r_k(t)\,\vec{e}_k = \underbrace{\vec{e}_k\, r_k(t)}$$

$\Leftrightarrow$ Spezialfall eines Vektorfeldes (Kap. 3.)

Name: <u>Weg</u>, Kurve, ...

Skizze für $n = 3$:



Zugehörige sog. <u>Raumkurve</u>, Bahnkurve, Trajektorie, Bogen, … :

$$\underline{\underline{\mathcal{C} := \{ \vec{r}(t) \mid t \in I \}}} \qquad (\subset \mathbb{R}^n)$$

↑ „schön C" ↑ „Teilmenge"

<u>Bem:</u>

- verschiedene Wege $\vec{r}(t)$ können dieselbe Raumkurve $\mathcal{C}$ <u>„parametrisieren"</u>.

- ab jetzt nur noch $\vec{r}(t)$, die nicht „zwischendurch umkehren", d.h. kein Teil von $\mathcal{C}$ wird mehrmals durchlaufen.

- ferner nur noch solche $\vec{r}(t)$, die $\mathcal{C}$ „in derselben Richtung durchlaufen": sog. <u>„orientierte Wege"</u>.

- ferner nur hinreichend oft diff'bare $\vec{r}(t)$ (vgl. Kap. 2.1)

Folgerung:

Jede andere Parametrisierung $\vec{y}(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ von $\mathcal{C}$

ist von der Form

$$\underline{\underline{\vec{y}(\tau) = \vec{r}(t(\tau))}}$$

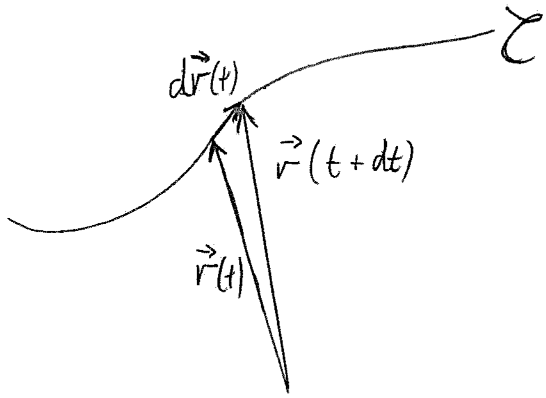
$\Leftrightarrow$ zu jedem $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ existiert genau ein $t = t(\tau)$

mit $\vec{y}(\tau) = \vec{r}(t)$

$\Rightarrow$ $t(\tau_1) = t_1$, $t(\tau_2) = t_2$,

$$\frac{dt(\tau)}{d\tau} \geq 0 \quad (\, t(\tau) \text{ monoton wachsend} \,)$$

Ableitung (vgl. Kap. 2.1)



[Bisher Δt und $\Delta\vec{r}$, jetzt dt und $d\vec{r}$:
$\Leftrightarrow$ „$\Delta t \to 0$ mitgedacht"]

$\Rightarrow$ (Momentan-)Geschwindigkeit:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{e}_k \, \dot{r}_k(t) \quad \Leftrightarrow \quad d\vec{r}(t) := \dot{\vec{r}}(t)\, dt \quad \text{(„Differential", vgl. Kap. 3.4.)}$$

$$\simeq \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t) \quad (\text{exakt für } dt \to 0)$$

$\Rightarrow$ Richtung: tangential zur Raumkurve bei $\vec{r}(t)$

Betrag: $$|\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \dot{r}_k^2(t)}$$

Ab jetzt nur noch $|\dot{\vec{r}}(t)| \neq 0 \quad \forall\, t \in I$ betrachtet

[„$\vec{r}(t)$ steht niemals still"]

$\vec{T}(t) := \dfrac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}$ heisst Tangenten- oder Tangentialvektor

$\Rightarrow \quad |\vec{T}(t)| = 1 \quad$ (Einheitsvektor)