Wiederholung 29.4.26:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(x)}{dx^k} = 0$$

↑ homogen

↑ linear (in y)

konst. Koeff. $a_k \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$

1.) Ansatz $y(x) = e^{zx}$, $z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ allg. Lsg. $\sum_{k=1}^{n} c_k e^{z_k t}$, wo

$$P(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n (z - z_1) \cdots (z - z_n) \quad \text{(char. Polynom)}$$

NS

2.) Modifikation bei Mehrfach-NS.

3.) Real- und Imaginärteil der komplexen Lösung(en)

$\Rightarrow$ rein reelle Lösung(en).

Beisp:

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = 0$$

„Normalfall": $a_0, a_1, a_2 > 0$

$$z_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{D}}{2a_2} \quad , \quad D := a_1^2 - 4a_2a_0$$

(i) $D>0$ : $x(t) = c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t}$ (allg. Lsg, rein reell)

(ii) $D=0 \Rightarrow z_1 = z_2 =: z$ , $x(t) = c_1 e^{zt} + c_2 t e^{zt}$ ( — " — )

(iii) $D<0$ , $z_{1/2} = \gamma \pm i\omega$ , $\gamma := -\frac{a_1}{2a_2}$ , $\omega := \frac{\sqrt{|D|}}{2a_2}$

$$x(t) = c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t} \quad \text{(komplex)}$$

rein reell: $x(t) = c_1 e^{\gamma t} \cos(\omega t) + c_2 e^{\gamma t} \sin(\omega t)$

$$= C e^{\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

In allen Fällen (i) - (iii):

- Anfangsbed. der Form $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$ ($t_0, x_0, v_0$ „vorgegeben") legen $C_{1,2}$ bzw. $C, \varphi$ und somit $x(t)$ eindeutig fest.

Weitere Beisp: Übungen

- Im „Normalfall" $(a_0, a_1, a_2 > 0)$ : $x(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

## 5.7 Inhomogene lineare DGl'en mit konstanten Koeffizienten

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(x)}{dx^k}}_{\text{wie vorhin.}} = \underbrace{g(x)}_{\text{„Inhomogenität"}}$$

Genau wie in Kap. 5.3. kann man zeigen: allg. Lsg. ist von der Form

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$ , wo

$y_h(x)$ allg. Lösung der homogenen DGl. : erledigt [Kap. 5.6]

$y_p(x)$ partikuläre (= irgend eine) Lsg. der inhom. DGl.

Möglichkeiten, $y_p(x)$ zu finden (vgl. Ende Kap. 5.3):

a) Raten.

Beisp: $y''(x) + 2y(x) = x$

$\Rightarrow$ $y_p(x) = \frac{1}{2}x$ ist eine Lösung.

b) Falls $g(x)$ von der Form

$$\underline{\underline{g(x) = \sum_{k=0}^{K} b_k x^k}} \quad \left(\text{Polynom vom Grad } K,\ b_K \neq 0\right)$$

dann „funktioniert" der Ansatz

$$\underline{\underline{y_p(x) = \sum_{k=0}^{K} c_k x^k}} .$$

Grund: $\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y_p(x)}{dx^k}$ ist dann ebenfalls Polyn. vom Grad $K$.

[Koeffizientenvergl. $\Rightarrow$ $K+1$ lin. Gl. für $K+1$ Unbekannte $c_k$]

c) Falls $g(x)$ von der Form

$$\underline{g(x) = b\, e^{zx}} \qquad (b, z \in \mathbb{C})$$

dann „funktioniert" der Ansatz

$$\underline{\underline{y_p(x) = c\, e^{zx}}}$$

Grund: $\sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{\frac{d^k y_p(x)}{dx^k}}_{c z^k e^{zx}} = e^{zx}\, c \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}_{=:P(z)} \stackrel{!}{=} g(x) = b\, e^{zx}$

$\Leftrightarrow \quad c = \dfrac{b}{P(z)}$ falls: $P(z) \neq 0$.

**Andernfalls**: Ansatz $\underline{\underline{y_p(x) = c\, x^j e^{zx}}}$ mit

$j \mathrel{\hat{=}}$ Vielfachheit der Nullstelle $P(z) = 0$

Beisp.:

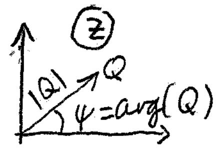
$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = g(t) = b e^{zt} \quad \text{mit}$$

$$b = B e^{i\varphi}, \quad z := i\Omega \quad (B, \varphi, \Omega \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \quad g(t + 2\pi/\Omega) = g(t) \quad \text{„periodisch"}$$

Ansatz: $x_p(t) = c\, e^{i\Omega t} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad a_2 c \underbrace{(i\Omega)^2}_{-\Omega^2} e^{i\Omega t} + a_1 c\, i\Omega\, e^{i\Omega t} + a_0 c\, e^{i\Omega t} \overset{!}{=} B e^{i\varphi} e^{i\Omega t}$$




$$\Leftrightarrow \quad c\, Q = B e^{i\varphi}, \quad Q := -a_2 \Omega^2 + i a_1 \Omega + a_0 = |Q| e^{i\psi}$$

Ann: $Q \neq 0 \; (\Leftrightarrow \; a_2 \Omega^2 \neq a_0 \text{ oder } a_1 \Omega \neq 0) \quad \Rightarrow \quad c = \frac{B}{|Q|} e^{i(\varphi - \psi)}$

$$\Rightarrow \quad x_p(t) = \frac{B}{|Q|} e^{i(\Omega t + \varphi - \psi)}$$

Wie oben (vgl. 3.): da $a_k \in \mathbb{R}$ ist

$$\tilde{x}_p(t) := \mathrm{Re}(x_p(t)) = \frac{B}{|Q|} \cos(\Omega t + \varphi - \psi)$$

eine partikuläre Lösung der „rein reellen DGl" mit

Inhomogenität $\quad \tilde{g}(t) := \mathrm{Re}(\underbrace{g(t)}_{e^{i(\Omega t + \varphi)}}) = B \cos(\Omega t + \varphi)$

$\uparrow$ Ampl. $\quad \uparrow$ Kreisfreq. $\quad \uparrow$ Phase

Diskussion:

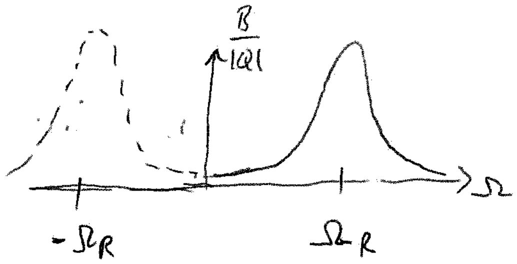
- $|Q| = \sqrt{(\mathrm{Re}(Q))^2 + (\mathrm{Im}(Q))^2} = \sqrt{\underbrace{(a_2\Omega^2 - a_0)^2 + a_1^2\Omega^2}_{f(\Omega^2)}}$ , $f(x) := (a_2 x - a_1)^2 + a_1^2 x$

Min. (als Fkt. von $\Omega$) $\Leftrightarrow f'(x) = 0 = 2(a_2 x - a_0) + a_1^2$

$\Leftrightarrow \Omega^2 = x = \dfrac{a_0 - a_1^2/2}{a_2} =: \Omega_R^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega = \pm\Omega_R$

$\Leftrightarrow \dfrac{B}{|Q|}$ in $\tilde{x}_p(t)$ max. („Resonanz"), umso „schärfer"

je kleiner $a_1$.




- $\varphi = \arg(Q)$ sog. „Phasenverschiebung" (von $\tilde{x}_p(t)$)

- Im Normalfall: $x(t) = \underbrace{x_h(t)}_{\downarrow \; 0 \text{ für } t\to\infty} + \tilde{x}_p(t) \longrightarrow \tilde{x}_p(t)$

$\Rightarrow$ „Einschwingvorgang abgeklungen", Anfangsbed. „vergessen"

usw: vgl. EP 1.

d) $a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = \underline{\underline{g(t) \quad (\text{beliebig!})}}$

<u>Beh:</u> $\underline{\underline{x_p(t) = \int_{t_0}^{t} ds \, g(s) \, K(t-s)}}$ , $t_0$ bel.

sog. „Kern"

$$K(t) := \frac{e^{z_1 t} - e^{z_2 t}}{a_2 (z_1 - z_2)} \quad , \quad z_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{D}}{2a_2}$$

<u>Bem:</u>

- <u>Für $z_1 - z_2 =: x \to 0$</u> folgt $\underline{\underline{K(t)}} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{(z_2+x)t} - e^{z_2 t}}{a_2 x}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{de L'Hospital}}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^{(z_2+x)t} \cdot t - 0}{a_2} = \underline{\underline{t e^{z_2} / a_2}}$$

- <u>Für $D<0$ :</u> $z_{1,2} = \gamma \pm i\omega$ , $\gamma := -\frac{a_1}{2a_2}$ , $\omega := \frac{\sqrt{|D|}}{2a_2}$ [$\Rightarrow x_p(t)$ komplex?]

$$\Rightarrow K(t) = \frac{e^{\gamma t} e^{i\omega t} - e^{\gamma t} e^{-i\omega t}}{a_2 (2i\omega)} = \frac{e^{\gamma t}}{a_2 \omega} \underbrace{\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}}_{\sin(\omega t)} \quad \text{reell!}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_p(t) = \int_{t_0}^{t} ds \, g(s) \frac{e^{\gamma(t-s)}}{a_2 \omega} \sin(\omega(t-s))}} \quad (\text{reell, falls } g(t) \text{ reell})$$

- Selbe Resultate (a - c) für spezielle $g(t)$ folgen nach langer Rechnung!

Bew: Übung 41c aus RdP1:

$$\frac{d}{dt}\int_a^t dy\, f(y,t) = f(y=t,t) + \int_a^t dy \frac{\partial}{\partial t} f(y,t)$$

Hier: $a = t_0$, $y = s$, $f(y=s,t) = g(s)\,K(t-s)$

$$\Rightarrow \dot{x}_p(t) = g(s=t)\underbrace{K(t-(s=t))}_{K(0)=0} + \int_{t_0}^t ds \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} g(s)\,K(t-s)}_{g(s)\,\dot{K}(t-s)}$$

$$= \int_{t_0}^t ds\; g(s)\,\dot{K}(t-s)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_p(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{genauso}}}{=} g(t)\,\dot{K}(0) + \int_{t_0}^t ds\; g(s)\,\ddot{K}(t-s)$$

$$\left.\frac{e^{z_1 t} z_1 - e^{z_2 t} z_2}{a_2(z_1 - z_2)}\right|_{t=0} = \frac{1}{a_2}$$

$$\Rightarrow a_2 \ddot{x}_p(t) + a_1 \dot{x}_p(t) + a_0 x(t) = \int_{t_0}^t ds\; g(s)\,L(t-s) + g(t)$$

$$L(t) := a_2 \ddot{K}(t) + a_1 \dot{K}(t) + a_0 K(t) = 0$$

da $e^{z_{1,2} t}$ diese DGl. erfüllt!

q.e.d