## 5.6 Homogene lineare DGl'en mit konstanten Koeffizienten

$$\underline{\underline{\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(x)}{dx^k} = 0}}$$

„homogen"

„linear" (in $y$)

„konst. Koeff." ($a_k \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$)

Wichtigste Eigenschaft:

Falls $y_1(x)$, $y_2(x)$ Lösungen, dann auch $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

$\forall\, \underline{\underline{c_{1,2} \in \mathbb{R}}}$ (<u>Linearität</u>).

Bew:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{\frac{d^k}{dx^k}\left[c_1 \cdot y_1(x) + c_2\, y_2(x)\right]}_{c_1 \frac{d^k}{dx^k} y_1(x) + c_2 \frac{d^k}{dx^k} y_2(x)}$$

$$= c_1 \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k} y_1(x)}_{=0} + c_2 \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k} y_2(x)}_{=0}$$

$$= 0$$ q.e.d.

Erinnerung:

$\mathbb{C} \mathrel{\hat{=}}$ Menge aller Zahlen $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$,

$i^2 = -1$, ansonsten selbe Rechenregeln wie in $\mathbb{R}$,

$z^* := x - iy$ , $\mathrm{Re}(z) := x = \frac{z + z^*}{2}$, $\mathrm{Im}(z) := y = \frac{z - z^*}{2i}$

~

Bem: Für $a_k \in \mathbb{C}$ und $c_{1,2} \in \mathbb{C}$ alles genauso, aber nie benötigt!

[bzw nur einmal]

~

Allg. Lösungsstrategie:

[anders als bisher: zuerst „allg. Theorie", dann Beisp.]

1.) Ansatz (vgl. Ende Kap. 5.3): $y(x) = e^{z \cdot x}$ $\quad z \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \quad y'(x) = z\, e^{zx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^k y(x)}{dx^k} = z^k e^{zx}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(x)}{dx^k} = \underbrace{e^{zx}}_{\neq 0 \ \forall z,x} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{n} a_k z^k = 0$$ („charakteristische Gl.")

$\Leftrightarrow$ Finde Nullstellen (NS) des „charakteristischen Polynoms"

$$P(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad (a_n \neq 0)$$

Fundamentalsatz der Algebra: es existieren n Zahlen $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ so, dass

$$P(z) = a_n (z - z_1)(x - z_2) \cdots (z - z_n)$$

Bew: Mathematik-Vorl.

$\Rightarrow \quad P(z) = 0 \iff z \in \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ [NS]

$\Rightarrow \quad y_k(x) := e^{z_k x}$ sind Lösungen („Fundamentalsystem")

$\Rightarrow \quad \underline{y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{z_k x}}$ ist allg. Lösung (für bel. $c_k \in \mathbb{R}$).

n Anfangs- bzw. Randbedingungen $\Rightarrow$ n lineare Gleichungen

für $c_1, \dots, c_n$ $\Rightarrow$ in der Regel eindeutige Lösung.

2.) <u>Ausnahmen:</u> Wenn zwei (oder mehr) NS $z_k$ zusammenfallen $\Rightarrow$ nur noch $z_1, \ldots, z_{n'}$ mit $n' < n$ paarweise verschieden,

analog für Lösungen $y_k(x) = e^{z_k x}$ und $y(x) = \sum_{k=1}^{n'} c_k e^{z_k x}$

$\Rightarrow$ $n$ Gl. für $n' < n$ Unbekannte $c_1, \ldots, c_{n'}$

$\Rightarrow$ im Allg. keine Lösung! $\Leftrightarrow$ „zu wenige" Lösungen $y_k(x)$, $k = 1, \ldots, n' < n$

<u>Ausweg:</u> neben $e^{z_k x}$ sind dann auch

$$x e^{z_k x}, \quad x^2 e^{z_k x}, \quad \ldots, \quad x^{j-1} e^{z_k x}$$

($j \mathrel{\hat{=}}$ Vielfachheit der NS $z_k$) weitere „unabhängige" Lösungen.

Bew: hier weggelassen. [Jordansche Normalform; vgl. Ü SS24 bzw Heuser]

$\Rightarrow$ insges. wieder $n$ Lösungen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$.

$\Rightarrow$ Weiter wie in 1.)

3.) <u>In der Physik sind oft nur reelle Lösungen sinnvoll.</u>

[Aber „Weg durchs Komplexe" vereinfacht oft die

Rechnungen (nur für <u>lin.</u> DGl'en!). ]

[zuerst ohne *]

$$\text{Bem: } \Big(P(z)\Big)^* = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(a_k z^k)^*}_{\substack{a_k^* (z^*)^k \\ \| \\ a_k \text{ (reell!)}}} = \sum_{k=0}^{n} a_k (z^*)^k = P(z^*)$$

sollte noch dastehen!

$\Big[$ oben: $P(z) = 0 \Leftrightarrow z_k \in \{z_1, \dots, z_n\}$ (NS) $\Big]$

$\Rightarrow$ entweder sowohl $z_k$ als auch $z_k^*$ sind NS, oder $z_k$ ist rein reell.

$\Downarrow$

$y_k(x) = e^{z_k t}$ und $(y_k(x))^* = e^{z_k^* t}$

beides Lösungen, aber komplex!

$\Downarrow$

$y_k(x) = e^{z_k t}$

rein reell

$\Downarrow$

auch $Re(y_k(x)) = \frac{1}{2} y_k(x) + \frac{1}{2} y_k^*(x)$ Lösg

ebenso $Im(y_k(x))$, aber jetzt rein reell!

$\sim$

<u>Beisp</u>: $n=2$, $x(t)$ statt $y(t)$:

$$\underline{\underline{a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = 0}} \qquad (a_k \in \mathbb{R},\ a_2 \neq 0)$$

(z.B. „harm. Oszillator": $m\ddot{x}(t) = -\gamma \dot{x}(t) - kx(t)$
$\Rightarrow a_2 = m > 0$, $a_1 = \gamma > 0$ „Dämpfung", $a_0 = k > 0$ „Federkonst.")

Ansatz: $x(t) = e^{zt} \Rightarrow a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{D}}{2a_2}, \quad \underline{D := a_1^2 - 4a_2 a_0} \quad \text{(Diskriminante)}$$

(i) $\underline{D > 0} \Rightarrow z_{1,2} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ allg. Lösung:

$$\underline{\underline{x(t) = c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t}}} \quad \text{(rein reell, vgl. 3.)}$$

„Normalfall": $a_0, a_1, a_2 > 0 \Rightarrow D < a_1^2$

$$\Rightarrow \sqrt{D} < a_1 \Rightarrow -a_1 + \sqrt{D} < 0 \Rightarrow \underline{\underline{z_{1,2} < 0}}$$

$$\Rightarrow e^{z_{1,2} t} \mathrel{\hat{=}} \text{„exponentieller Abfall"}$$

(ii) $\underline{\underline{D = 0}}$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{z_{1,2} = \frac{-a_1}{2a_2} =: z}}$ $\in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ eine Lsg ist $e^{zt}$

Beh (vgl. 2.): $x(t) := t e^{zt}$ ist weitere Lsg.

Bew: $\dot{x}(t) = e^{zt} + t e^{zt} \cdot z = e^{zt}(1 + tz)$

$$\ddot{x}(t) = z e^{zt} + e^{zt} \cdot z + t e^{zt} z^2$$

$$= e^{zt}(2z + tz^2)$$

$\Rightarrow a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) =$

$$= e^{zt} \underbrace{\left[ a_2 (2z + tz^2) + a_1 (1 + tz) + a_0 \cdot t \right]}_{\underbrace{a_2 \cdot 2z + a_1}_{= 0 \text{ da } z := -a_1/2a_2} + t \underbrace{(a_2 z^2 + a_1 z + a_0)}_{=0}} = 0$$

q.e.d

$\Rightarrow$ allg. Lösung $\underline{\underline{x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{zt}}}$ (reell)

„Normalfall": $a_0, a_1, a_2 > 0$ $\Rightarrow$ $z < 0$

(iii) $\underline{\underline{D < 0}}$ $\Rightarrow$ $|D| = -D \doteq 4a_2a_0 - a_1^2 > 0$

$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{-|D|} = i\sqrt{|D|}$

[komplexe Wurzel] [reelle Wurzel]

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{z_{1,2} = \gamma \pm i\omega}}$ mit $\gamma := -\frac{a_1}{2a_2}$, $\omega := \frac{\sqrt{|D|}}{2a_2}$

$$\Rightarrow x_{1,2}(t) = e^{z_{1,2}t} = e^{\gamma t} \cdot \underbrace{e^{\pm i\omega t}}_{\cos(\pm\omega t) + i\sin(\pm\omega t)\ (\text{Euler})}$$ $(\Rightarrow z_1^* = z_2\,,\ y_1^*(x) = y_2(x))$

$$= e^{\gamma t}\cos(\omega t) \pm i\, e^{\gamma t}\sin(\omega t)$$

Vgl. 3.) : $z_1^* = z_2\,,\ y_1^*(x) = y_2(x)$

$\mathrm{Re}(x_1(t)) = e^{\gamma t}\cos(\omega t)$ ist rein reelle Lsg.,

ebenso $\mathrm{Im}(x_1(x)) =: e^{\gamma t}\sin(\omega t)$,

($x_2(x)$ ergibt nichts neues!)

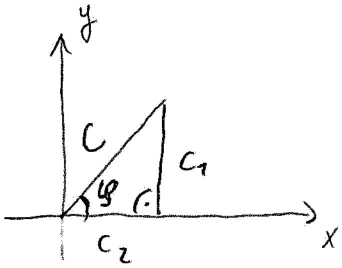
[ Check: selbst! ]

$\Rightarrow$ allg. Lösung

$$\underline{x(t) = e^{\gamma t}\left( c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\right)} \qquad (\text{alles reell})$$

Bem: sei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ bel. aber fest.

$$C := \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$




$\Rightarrow$ es existiert ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $\sin\varphi = \frac{c_1}{C}$, $\cos\varphi = \frac{c_2}{C}$

$\Rightarrow$ $c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) =$

$$= C \underbrace{\left[ \sin(\varphi)\cos(\omega t) + \cos(\varphi)\sin(\omega t) \right]}_{\sin(\varphi + \omega t) \quad (\text{Additionstheorem})}$$

$\Rightarrow$ man kann allg. Lösung auch schreiben als

$$\underline{\underline{x(t) = C\, e^{\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)}}$$

mit beliebigen $C \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$

$\uparrow$ sog. Amplitude $\qquad$ $\uparrow$ sog. Phase

„Normalfall": $a_0, a_1, a_2 > 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{a_1}{2a_2} < 0$, $\omega = \frac{\sqrt{|D|}}{2a_2} > 0$

$\Rightarrow x(t) \mathrel{\hat{=}}$ exponentiell gedämpfte Schwingung

Speziell: $a_1 \to 0 \Rightarrow \gamma = 0$, ungedämpfte Schwingung

mit Amplitude $C$ und Phase $\varphi$

$\sim$

In allen Fällen (i) – (iii):

<u>Anfangsbed.</u> der Form $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$

($t_0$, $x_0$, $v_0$ „vorgegeben") legen $C_{1,2}$ bzw. $C, \varphi$ und somit

<u>$x(t)$ eindeutig</u> fest.

Weitere Beisp: Übungen