Mit <u>Anfangsbed.</u> $y(x_0) \stackrel{!}{=} y_0$:

wähle $A(x) = \int_{x_0}^{x} dt\, a(t)$ (Stammfkt) $\Rightarrow A(x_0) = 0$

$$\Rightarrow y(x_0) = C \underbrace{e^{A(x_0)}}_{=1} + \underbrace{\int_{x_0}^{x_0} dt \ldots}_{=0} \stackrel{!}{=} y_0 \Rightarrow C \stackrel{!}{=} y_0 \Rightarrow$$

$$\underline{y(x) = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} dt\, a(t)} + \int_{x_0}^{x} dt\, b(t)\, e^{\int_{t}^{x} ds\, a(s)}}$$

Check: $y'(x) = \ldots$ Übungen $\ldots = a(x)\,y(x) + b(x)$ ✓

Beisp: Übungen

$\sim$

Schlussbem.:

- Wichtiges Prinzip (vgl. Ende S. 2): es kann uns egal sein, warum unser „Trick" (Variation der Konst.) funktioniert. Hauptsache, der „check" am Ende stimmt! Genauso: Jeder [noch so „faule"] „Trick" oder „Ansatz" ist erlaubt [z.B. „raten", „nachschlagen", KI fragen, obskure Argumente und „Rechungen", ...] solange die Lösung am Ende die DGl. erfüllt!

- „Lösen von DGl'en" und „Integrieren" sind eng verwandt.

- Klausur: Man kann sich die Lösungsformeln merken, oder jedes Mal die Variation der Konst. selbst durchführen.

5.4 Separation der Variablen

Beisp. 1: $y'(x) = a(x)\, y(x)$ ($\Rightarrow$ Kap. 5.2)

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{y'(x)}{y(x)}}_{\frac{d}{dx}\ln(y(x))} = \underbrace{a(x)}_{A'(x)}$$

$$\Rightarrow \ln(y(x)) = A(x) + c_1$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{A(x)+c_1} = \underbrace{e^{c_1}}_{=:c} e^{A(x)} = c\, e^{A(x)}$$

Beisp. 2: $y'(x) = a(x)\, \underbrace{y^n(x)}_{=:(y(x))^n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 1$ (nichtlin. DGl.).

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{y'(x)}{(y(x))^n}} = \underbrace{a(x)}_{A'(x)}$$

$$(y(x))^{-n}\, y'(x) = \frac{d}{dx}\, (y(x))^{\overbrace{-n+1}^{1-n}} \left(\frac{1}{-n+1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad (y(x))^{1-n}\, \frac{1}{1-n} = A(x) + c$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y(x) = \left((1-n)\,(A(x)+c)\right)^{\frac{1}{1-n}}}}$$

Allg. Fall:

$$y'(x) = a(x) \cdot b(y(x))$$

- sog. „separable DGl."
- 1. Ordn., homogen, im Allg. nichtlinear

Lösungsweg:

(i) „Separation der Variablen":

$$\frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x)$$

(bzw. mit $y'(x) = \frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{b(y)} = a(x)\,dx \Rightarrow$ x und y „separiert")

(ii) Integrieren:

Finde $B(y)$ mit $B'(y) = \frac{1}{b(y)}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx} B(y(x)) = B'(y(x))\, y'(x) = \frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x) = \frac{d}{dx} A(x)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{B(y(x)) = A(x) + c}}$$ („implizite Lösung")

(iii) Auflösen:

$$\underline{\underline{y(x) = B^{-1}(A(x) + c)}}$$ („explizite Lösung")

Bem:

- Wie immer: allg. Lösung mit Int.-Konst. c

- Anfangsbed. $y(x_0) = y_0$ legt c fest:

$$B(y_0) \underset{\substack{\uparrow \\ (ii)}}{=} A(x_0) + c \quad \Rightarrow \quad c = B(y_0) - A(x_0)$$

- Bestimmung von $A(x)$ und $B(y)$ (Stammfkt'en von $a(x)$ und $\frac{1}{b(y)}$) und von $B^{-1}(y)$ nicht immer einfach!

- Wie immer (vgl. S. 5.15):

Ob alles in (i)-(iii) „sauber" ist egal, wenn nur DGl. am Ende erfüllt!

• Alternativ (wie immer): [zuerst $x \to t$]

$$\int_{x_0}^{x} dt \underbrace{\frac{\frac{d}{dt} y(t)}{b(y(t))}}_{\substack{B'(y(t)) \frac{d}{dt} y(t) \\ = \frac{d}{dt} B(y(t))}} = \underbrace{\int_{x_0}^{x} a(t)}_{A(x) - A(x_0)}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{B(y(x)) - B(y(x_0))}$$

$$\Rightarrow \quad B(y(x)) = A(x) + \underbrace{B(y(x_0)) - A(x_0)}_{\hat{=}\, c}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = B^{-1}(A(x) + c)$$

Weitere Beisp: Übungen

5.5. Bernoulli-DGl'en

Beisp: $$y'(x) = \frac{1}{x}\, y(x) + x\, \underbrace{y^2(x)}_{=: (y(x))^2}$$

[Trick / Idee] Ansatz (vgl. S. 5.15):

$$z(x) := \frac{1}{y(x)}$$

$$\Rightarrow \quad z'(x) = \left((y(x))^{-1}\right)' = (-1)\,(y(x))^{-2} \cdot \underbrace{y'(x)}_{\frac{1}{x} y(x) + x\, y^2(x)}$$

$$= -\frac{1}{x}\, \underbrace{\frac{1}{y(x)}}_{z(x)} - x$$

$$\Leftrightarrow \quad z'(x) = \underbrace{-\frac{1}{x}}_{=: a(x)}\, z(x) \underbrace{- x}_{=: b(x)}$$

$$\overset{\text{Kap. 5.3}}{\Longrightarrow} \quad z(x) = z_0\, e^{\int_{x_0}^{x} dt\, a(t)} + \int_{x_0}^{x} dt\; b(t)\, e^{\int_t^x ds\, a(s)}$$

$$\int_{x_0}^{x} dt\, a(t) = \int_{x_0}^{x} dt \left(-\underbrace{\tfrac{1}{t}}_{=\frac{d}{dt}\ln t}\right) = \ln(x_0/x)$$

$$\underbrace{\qquad}_{-\ln t\Big|_{t=x_0}^{t=x} = -\ln x + \ln x_0}$$

$$\int_{x_0}^{x} dt\, b(t)\, e^{\int_t^x ds\, a(s)} = \underbrace{\int_{x_0}^{x} dt\, (-t)\, \underbrace{e^{\ln(t/x)}}_{t/x}}_{-\frac{1}{x}\underbrace{\int_{x_0}^{x} dt\, t^2}_{\frac{1}{3}t^3\Big|_{t=x_0}^{t=x} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x_0^3}}$$

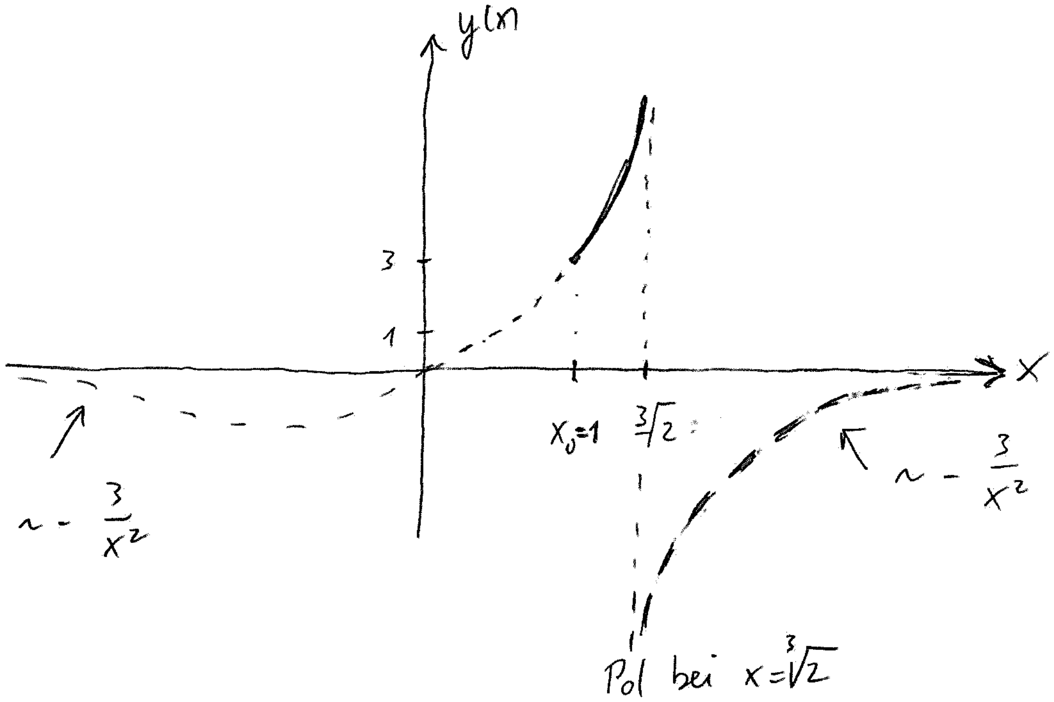
$$\Rightarrow \underbrace{z(x)}_{\frac{1}{y(x)}} = \underbrace{\underbrace{z_0}_{\frac{1}{y_0}}\, \underbrace{e^{\ln(x_0/x)}}_{x_0/x}}_{\frac{1}{x}\cdot\frac{x_0}{y_0}} - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x_0^3\right)$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{x}{\underbrace{\frac{x_0}{y_0} + \frac{1}{3}x_0^3}_{\hat{=}\, c} - \frac{1}{3}x^3}$$

Check: erfüllt DGl. (sofern Nenner $\neq 0$) ; selbst!

z.B. $x_0 = 1, \quad y_0 = 3 \quad \Rightarrow$

$$y(x) = \frac{3x}{\underbrace{2 - x^3}_{=0 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt[3]{2} \simeq 1{,}44}}$$



Lösung divergiert wenn $x \to \sqrt[3]{2}$. Lösung für $x > \sqrt[3]{2}$ noch akzeptabel?

Merke: sowas kann bei DGl'en „passieren"!

Allg. Fall:

$$\underline{\underline{y'(x) = \alpha(x)\, y(x) + \beta(x)\, \big(y(x)\big)^{\gamma}}} \quad (\text{Bernoulli-DGl.})$$

mit $\underline{\underline{\gamma \in \mathbb{R},\ \gamma \neq 1}}$ $\quad$ ($\gamma = 1 \rightarrow$ siehe Kap. 5.2)

[im Beisp: $\gamma = 2$]

Ansatz: $\quad \underline{z(x) := \big(y(x)\big)^{1-\gamma}}$

$$\Rightarrow \quad z'(x) = (1-\gamma)\,\big(y(x)\big)^{-\gamma}\, \underbrace{y'(x)}_{\alpha y + \beta y^{\gamma}}$$

$$= (1-\gamma)\Big[\alpha(x)\, \underbrace{\big(y(x)\big)^{1-\gamma}}_{= z(x)} + \beta(x)\Big]$$

$$z'(x) = \underbrace{(1-\gamma)\,\alpha(x)}_{=:\, a(x)}\, z(x) + \underbrace{(1-\gamma)\,\beta(x)}_{=:\, b(x)}$$

$\Rightarrow$ weiter wie in Kap. 5.3

Beisp: Übungen