Rechenmethoden der Physik I

WS 2025/26 — Übungsblatt 6

http://www.physik.uni-bielefeld.de/~reimann/RdP1.html

Schriftlich abzugeben sind: 30, 31a-c, 32a

Aufgabe 30

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{f}(\vec{x}) := \begin{pmatrix} x_2^3 \\ x_1 \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix}$ mit $\vec{x} := (x_1, x_2, x_3)$. Bestimmen Sie

a) Das Skalarfeld $\quad \mathrm{div}(\vec{f}(\vec{x})) := \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3(\vec{x})}{\partial x_3}$ („Divergenz von $\vec{f}$“).

b) Das Vektorfeld $\quad \mathrm{rot}(\vec{f}(\vec{x})) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3(\vec{x})}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_2} \end{pmatrix}$ („Rotation von $\vec{f}$“).

Aufgabe 31

Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von de l'Hospital die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-x}+x-1}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} P(x)\, e^{-\alpha x}$ für beliebige $\alpha > 0$ und beliebige Polynome $P(x)$.

– bitte wenden –

Aufgabe 32

Sei $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bzw. $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein beliebiges (zweimal stetig differenzierbares) Skalarfeld bzw. Vektorfeld. Ferner seien $\mathrm{grad}(h(\vec{x}))$, $\mathrm{div}(\vec{f}(\vec{x}))$ und $\mathrm{rot}(\vec{f}(\vec{x}))$ wie in den Aufgaben 28 und 30 definiert. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{rot}\Big(\mathrm{grad}(h(\vec{x}))\Big) = \vec{0}$

b) $\mathrm{div}\Big(\mathrm{rot}(\vec{f}(\vec{x}))\Big) = 0$

c) $\mathrm{div}\Big(h(\vec{x})\,\vec{f}(\vec{x})\Big) = \mathrm{grad}(h(\vec{x})) \cdot \vec{f}(\vec{x}) + h(\vec{x})\ \mathrm{div}(\vec{f}(\vec{x}))$

d) $\mathrm{rot}\,\Big(h(\vec{x})\vec{f}(\vec{x})\Big) = h(\vec{x})\ \mathrm{rot}(\vec{f}(\vec{x})) - \vec{f}(\vec{x}) \times \mathrm{grad}(h(\vec{x}))$