5 Differentialgleichungen

[Vorgehen: zuerst spezielle Beisp. Allg. Betrachtungen später.]

5.1 Direkte Integration

Beisp. 1: Finde $y(x)$ mit der Eigenschaft

$$y'(x) = \sin(x) - x^3$$

Sog. Differentialgleichung (DGl.) erster Ordnung.

nur erste Ableitung kommt vor

$\Leftrightarrow$ finde Stammfkt. von $f(x) = \sin(x) - x^3$, jetzt aber

$y(x)$ statt $F(x)$ genannt:

$\Rightarrow$ $y(x) = -\cos(x) - \frac{x^4}{4} + C$, $C \in \mathbb{R}$ beliebig (Integrationskonstante)

Check: $y'(x) = \sin(x) - \frac{1}{4} \cdot 4x^3$ ✓

<u>Bem:</u>

- c beliebig $\Leftrightarrow$ viele Lösungen (nicht eindeutig)

  $\Leftrightarrow$ sog. <u>allgemeine Lösung</u> (der DGl.).

- Wird eindeutig, sobald man für ein x_0 den Wert von $y(x_0) =: y_0$ (sog. <u>Anfangsbedingung</u>) vorgibt (sog. <u>Anfangswertproblem</u>).

  z.B. $\underline{x_0 = 0}$, $\underline{y_0 = 5}$

  $$\Rightarrow \quad y(0) = \underbrace{-\cos(0)}_{-1} - \underbrace{\frac{0^4}{4}}_{=0} + c \overset{!}{=} 5 \quad \Rightarrow \quad c = 4$$

  $$\Rightarrow \quad \underline{y(x) = -\cos(x) - \frac{x^4}{4} + 4}$$

<u>Alternativ:</u> beide Seiten der DGl. integrieren [vorher x durch t ersetzen!]:

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} dt \, \frac{d}{dt} y(t)}_{y(t)\Big|_{t=x_0}^{t=x} = y(x) - \underbrace{y(x_0)}_{y_0}} = \underbrace{\int_{x_0}^{x} dt \left(\sin(t) - t^3\right)}_{-\cos(t) - \frac{t^4}{4}\Big|_{t=x_0}^{t=x} =}$$

[nicht x!]

$$= -\cos(x) - \frac{x^4}{4} + \cos(x_0) + \frac{x_0^4}{4}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = -\cos(x) - \frac{x^4}{4} + \underbrace{y_0 + \cos(x_0) + \frac{x_0^4}{4}}_{}$$

$= c$ von vorhin, aber jetzt kann man jedes vorgegebene x_0 und y_0 sofort auswerten!

Beisp. 2:

$$m\ddot{x}(t) = -g \qquad (\text{„freier Fall in 1 Dim"})$$

DGl. 2. Ordnung

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{x}(t) = a \ , \quad a := -\frac{g}{m}$$

Stammfkt: $\dot{x}(t) = at + c_1 \ , \quad c_1 \in \mathbb{R}$

Nochmals: $x(t) = \frac{a}{2}t^2 + c_1 t + c_2 \ , \quad c_2 \in \mathbb{R}$

(allg. Lösung)

Jetzt 2 Integrationskonst. c_1 und c_2

$\Leftrightarrow$ 2 Anfangs- oder Randbedingungen machen Lösung eindeutig.

z.B. kann man $x(t_0) =: x_0$ und $\dot{x}(t_0) = v_0$ vorgeben,

oder auch $x(t_0) = x_0$ und $x(t_1) = x_1$.

Allg. Fall:

$$\underbrace{y^{(n)}}_{\text{n-te Ableitung}}(x) = a(x)$$

- man muss n-mal integrieren.
- man erhält n Integrationskonst. $c_1, \dots, c_n$ (allg. Lösung)
- mittels n Anfangs- bzw. Randbedingungen wird Lösung eindeutig.

Fazit: man muss Stammfkt'en finden bzw. Integrale auswerten.

Wir wissen: Im Prinzip geht das (fast) immer, in der Praxis kann es schwierig werden!

falls a(x) integrabel

5.2 Homogene lineare DGl'en 1. Ordnung

Beisp: $y'(x) = x \cdot y(x)$

„linear" $\Leftrightarrow$ nur erste Potenzen von y (kein y^2, $\sin y$, ...)

„homogen" : später erklärt!

$\Leftrightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = x \quad \Leftrightarrow$ (auf beiden Seiten Stammfkt'en bestimmen)

$$\ln(y(x)) + C_1 = \frac{1}{2}x^2 + C_2 \quad , \quad C_{1,2} \in \mathbb{R}$$

$$\left(\text{denn: } \frac{d}{dx} \ln(y(x)) = \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) \ \checkmark \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 + C_2 - C_1} = e^{\frac{1}{2}x^2} \underbrace{e^{C_2 - C_1}}_{=:C} = C e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \text{(allg. Lösung)}$$

check: $y'(x) = C e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x = y(x) \cdot x \quad \checkmark$

~

<u>Wichtiges Prinzip:</u> wir haben nicht darauf geachtet, ob

$y(x) \neq 0$ (Division) und $y(x) > 0$ (Logarithmus).

Grund: Hauptsache der Check am Ende funktioniert!

Analog: es sind bel. $c \in \mathbb{R}$ erlaubt, obwohl ursprünglich

$$c := e^{c_2 - c_1} > 0$$

<u>Mit Anfangsbed:</u> z. B. $y(0) \overset{!}{=} 2 \quad \Rightarrow \quad c \underbrace{e^{\frac{1}{2}0^2}}_{=1} \overset{!}{=} 2 \quad \Rightarrow c = 2$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y(x) = 2\, e^{\frac{1}{2}x^2}}}$$

Alternativ: integrieren [wie vorhin, zuerst $x \to t$]:

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} dt\, \underbrace{\frac{\frac{d}{dt}y(t)}{y(t)}}_{\frac{d}{dt}\ln(y(t))}}_{\ln(y(t))\Big|_{t=x_0}^{t=x} = \ln y(x) - \ln y(x_0) = \ln\left(\frac{y(x)}{y(x_0)}\right)} = \underbrace{\int_{x_0}^{x} dt\, t}_{\frac{1}{2}t^2\Big|_{t=x_0}^{t=x} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x_0^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y(x)}{y(x_0)} = e^{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x_0^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{y(x) = \underbrace{y(x_0)\, e^{-\frac{1}{2}x_0^2}}_{= c \text{ von vorhin}}\, e^{\frac{1}{2}x^2}}$$

Allg. Fall:

$$y'(x) = a(x) \cdot y(x)$$

($a(x)$ „gegeben", $y(x)$ „gesucht")

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{y'(x)}{y(x)}}_{\frac{d}{dx}\ln(y(x))} = a(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(y(x)) + C_1 = \underbrace{A(x) + C_2}_{}$$

bel. Stammfkt. von $a(x)$

wie vorhin

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = C\, e^{A(x)} \quad , \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{(allg. Lösung)}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = y(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} dt\, a(t)}$$

↑

integrieren wie vorhin,
Details selbst, oder Kap. 5.3, oder Übungen

5.3 Inhomogene lineare DGL'en 1. Ordnung

Hier gleich allg. Fall betrachtet:

$$\underline{\underline{y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x)}}$$

$\uparrow$

sog. Inhomogenität

$b(x) = 0 \iff$ hom. Fall: (Kap. 5.2)

$a(x) = 0 \iff$ direkte Integration: (Kap. 5.1)

<u>Beh.:</u> Allg. Lösung ist von der Form

$$\underline{\underline{y(x) = y_h(x) + y_p(x)}} \quad , \quad \text{wo}$$

$y_h(x)$ allg. Lösung der <u>h</u>omogenen DGl. (d.h. $y_h'(x) = a(x)\,y_h(x)$) und

$y_p(x)$ <u>p</u>artikuläre (= irgend eine) Lösung der inhomogenen DGl.

<u>Bew:</u>

$$y'(x) = y_h'(x) + y_p'(x) = a(x)\,y_h(x) + a(x)\,y_p(x) + b(x)$$

$$= a(x)\,y(x) + b(x)$$

$\sim$

$\Rightarrow \quad y_h(x) = c\, e^{A(x)}$ [kennen wir schon] (Kap. 5.2).

„Trick" um $y_p(x)$ zu finden:

sog. Variation der Konstanten.

$\Updownarrow$

$\Leftrightarrow$ Ansatz: $y_p(x) = C(x)\, e^{A(x)}$

$$\Rightarrow \quad y_p'(x) = C'(x)\, e^{A(x)} + \underbrace{C(x) \underbrace{\left(e^{A(x)}\right)'}_{e^{A(x)} \cdot \underbrace{A'(x)}_{a(x)}}}_{y_p(x) \cdot a(x)}$$

$$\stackrel{!}{=} a(x)\, y_p(x) + b(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad C'(x)\, e^{A(x)} = b(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad C'(x) = b(x)\, e^{-A(x)}$$

Eine Lösung ist (wir brauchen nur eine!)

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} dt \; b(t)\, e^{-A(t)} \qquad (x_0 \text{ bel.})$$

$$\Rightarrow \; y_p(x) = C(x)\, e^{A(x)} = \int_{x_0}^{x} dt \; b(t)\, e^{A(x)-A(t)}$$

Insgesamt : $y(x) = y_h(x) + y_p(x) \;\Rightarrow$

$$\underline{\underline{y(x) = c\, e^{A(x)} + \int_{x_0}^{x} dt \; b(t)\, e^{A(x)-A(t)}}} \qquad (\text{allg. Lsg}, \; A'(x) = a(x))$$

__Bem:__

- $c \in \mathbb{R}$ bel., aber auch x_0 bel. $\Rightarrow$ man könnte eine davon „festsetzen", z.B. $c=0$ oder $x_0=0$. Wäre aber später „unpraktisch".

- $\underline{\underline{A(x) - A(t) = \int_{t}^{x} ds \; a(s)}}$ [Hauptsatz der Integralrechnung!]

6.2.26