4.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $\underline{\underline{A}}$ bel. aber feste $n \times n$ Matrix.

Def.: Jedes $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $\vec{v} \neq \vec{0}$ und

$$\underline{\underline{A}}\,\vec{v} = \lambda \vec{v} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

heisst Eigenvektor (EV) von $\underline{\underline{A}}$ zum Eigenwert (EW) λ.

Die Gl. selbst (bzw. deren Lösung) heisst Eigenwertproblem.

Extrem wichtig z.B. in der Quantenmechanik.

Bem:
- Falls $\vec{v}$ EV, dann auch $a\vec{v}$ $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$...
- Hier nur reelle EW λ betrachtet.

Beisp:

1.) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{A}}\,\vec{v} = \lambda \vec{v}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{} = \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{}$

$\begin{pmatrix} v_1 + 2v_2 \\ -v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad v_1 + 2v_2 = \lambda v_1$

$-v_2 = \lambda v_2 \quad \Rightarrow$ entweder $\lambda = -1$ oder $v_2 = 0$

(i) $\underline{\underline{\lambda = -1}} \Rightarrow v_1 + 2v_2 = -v_1 \Rightarrow v_2 = -v_1 \Rightarrow \underline{\underline{\vec{v} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}, \; a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(ii) $v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = \lambda v_1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 1}}, \; \underline{\underline{\vec{v} = b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}, \; b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\uparrow$

$v_1 = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ KniF

2.) $\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ (Diagonalmatrix)

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{S. 4.9}}}{\Rightarrow} \quad \underline{\underline{D}}\, \vec{e}_k = \lambda_k \vec{e}_k \quad \forall\, k = 1, \dots, n$$

d.h. jedes $\vec{e}_k$ ist EV von $\underline{\underline{D}}$ mit EW λ_k.

3.) Sei $\underline{\underline{R}} \in O(n)$.

Erinnerung (S. 4.29): $\underline{\underline{R}}\, \vec{e}_k = \vec{R}^s_k$, $\underline{\underline{\vec{R}^s_j \cdot \vec{R}^s_k = \delta_{jk}}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R}}^T \vec{R}^s_k = \underbrace{\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}}}_{=1}\, \vec{e}_k = \vec{e}_k$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{R}}^T \vec{R}^s_k = \underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{D}}\, \vec{e}_k \overset{2.)}{=} \underline{\underline{R}}\, \lambda_k \vec{e}_k = \lambda_k \vec{R}^s_k$$

Für $\underline{\underline{\underline{A} := \underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{R}}^T}}$ folgt

$$\underline{\underline{\underline{\underline{A}}\, \vec{R}^s_k = \lambda_k \vec{R}^s_k \quad \forall\, k = 1, \dots, n}}$$

4.6 Zwei wichtige Sätze

Erinnerung: $\underline{\underline{A}}^T$ ist die Transponierte von $\underline{\underline{A}}$ mit $A^T_{jk} = A_{kj}$.

Def.: $\underline{\underline{A}}$ heisst symmetrische Matrix $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$ $\Leftrightarrow$ $A_{kj} = A_{jk}$

Satz 1: Falls $\underline{\underline{A}}$ symmetrisch, dann ex. ein $\underline{\underline{R}} \in O(n)$

und eine Diagonalmatrix $\underline{\underline{D}}$ so, dass

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{R}}^T$$

Bew: L A P

Folgerungen:

- $$\underline{\underline{\underline{R}^T \underline{A} \underline{R}}} = \underbrace{\underline{R}^T \underline{R}}_{=\mathbb{1}} \underline{D} \underbrace{\underline{R}^T \underline{R}}_{=\mathbb{1}} = \underline{\underline{\underline{D}}}$$

„jede symm. Matrix ist mittels einer orthogonalen Trafo diagonalisierbar".

- $$\underline{\underline{\underline{A} \vec{R}^s_k}} \underset{\uparrow}{=} \underline{\underline{\lambda_k \vec{R}^s_k}} \quad \forall\, k = 1, \dots, n \quad , \quad \vec{R}^s_j \cdot \vec{R}^s_k = \delta_{jk}$$

Beisp. 3.) auf S. 4.36:

„die EV von $\underline{A}$ bilden eine ONB"

<u>Satz 2</u>: Sei $\underline{\underline{A}}$ bel. aber fest. Dann ex. ein $\underline{\underline{R}} \in O(n)$ und eine symm. Matrix $\underline{\underline{B}}$ so, dass

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{B}}$$

(sog. Polarzerlegung von $\underline{\underline{A}}$)

<u>Bew</u>: LAP

Mit Satz 1 ex. zudem ein $\tilde{\underline{\underline{R}}} \in O(n)$ und eine Diagonalmatrix $\underline{\underline{D}}$ so, dass $\underline{\underline{B}} = \tilde{\underline{\underline{R}}}\,\underline{\underline{D}}\,\tilde{\underline{\underline{R}}}^T$. Mit $\underline{\underline{R}}_1 := \underline{\underline{R}}\,\tilde{\underline{\underline{R}}}$ und $\underline{\underline{R}}_2 := \tilde{\underline{\underline{R}}}^T$ folgt $\underline{\underline{R}}_1, \underline{\underline{R}}_2 \in O(n)$ und $\underline{\underline{A}} = \underbrace{\underline{\underline{R}}\,\tilde{\underline{\underline{R}}}}_{\underline{\underline{R}}_1}\,\underline{\underline{D}}\,\underbrace{\tilde{\underline{\underline{R}}}^T}_{\underline{\underline{R}}_2} \Rightarrow$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}_1\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{R}}_2$$

„Jede Matrix lässt sich zerlegen in eine „Drehspiegelung" ($\underline{\underline{R}}_1$), eine „Streckung" ($\underline{\underline{D}}$) und eine weitere „Drehspiegelung" ($\underline{\underline{R}}_2$)."

$\Leftrightarrow$ vollständige Klassifizierung aller $n\times n$-Matrizen $\underline{\underline{A}}$

und damit (vgl. Übung 5.2) aller lin. Op. $\underline{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

[Bem: symmetrische Matrizen sind Spezialfälle sog. selbstadjungierter Matrizen, und analoge Sätze gelten auch für letztere (→ LAP).]

4.7 Drehungen im $\mathbb{R}^2$

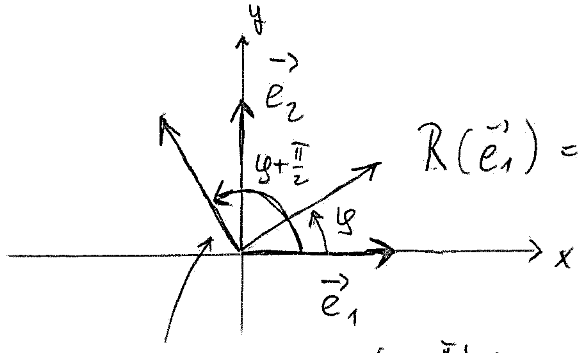
Sei $\underline{\underline{R}} \in SO(2)$ („Drehmatrix", vgl. S. 4.33) $\Rightarrow$ $\underline{\underline{R}} = \left(\vec{R}^s_1 \; \vec{R}^s_2 \right)$

$$\vec{R}^s_k \underset{\uparrow}{=} \underline{\underline{R}}\,\vec{e}_k \overset{\text{S. 4.6}}{=} R(\vec{e}_k) \;, \quad k = 1,2 \;.$$

Folgerung 3.) auf S. 4.8 „Drehoperator" bzw. „Drehung"

Anschaulich klar (keine „strenge Herleitung"):

Für jede Drehung R ex. ein Drehwinkel φ mit



$$R(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$R(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\varphi+\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Details selbst!

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =: \underline{\underline{R}}(\varphi) \qquad \text{„Drehung um } \varphi\text{"}$$

~

Ü 51: $\underline{\underline{R}}(\varphi)\,\underline{\underline{R}}(\chi) = \underline{\underline{R}}(\varphi+\chi)$ (anschaulich klar!)

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{R}}(\varphi)\,\underline{\underline{R}}(-\varphi) = \underline{\underline{R}}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{R}}^{-1}(\varphi) = \underline{\underline{R}}(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{R}}^{T}(\varphi) \quad \checkmark$$

NICHT

Zugehörige „passive Drehung“:

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{2} v_k \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{2} u_k \vec{R}_k^{s}$$

S. 4.34

$$\vec{u} = \underline{\underline{R}}^{T}(\varphi)\,\vec{v} = \underline{\underline{R}}(-\varphi)\,\vec{v}$$

Anschaulich klar: Drehung der Basis um φ $\hat{=}$ Drehung von $\vec{v}$ um $-\varphi$

4.8 Drehungen im $\mathbb{R}^3$

Spezialfälle:

- Drehung um z-Achse um Winkel φ

$\hat{=}$ Drehung in x-y-Ebene (z-Komponente fest) $\Rightarrow$

wird beschrieben durch

$$\underline{\underline{R}}_z(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Analog um x- und y-Achse:

$$\underline{\underline{R}}_x(\varphi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{R}}_y(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

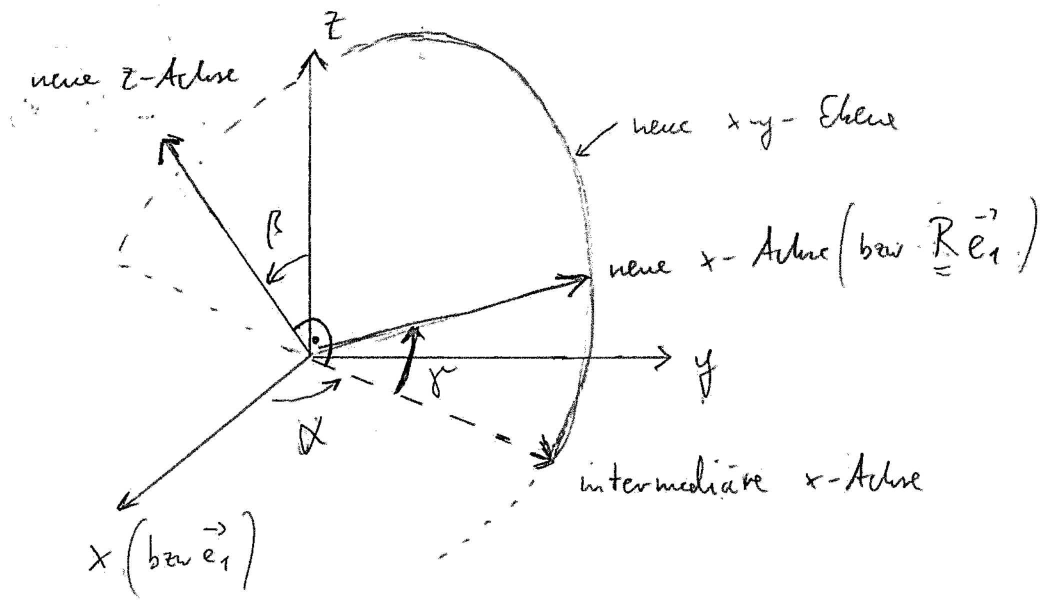
<u>Satz</u>: Jede Drehung um eine bel. Achse lässt sich schreiben als

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}_z(\gamma)\, \underline{\underline{R}}_x(\beta)\, \underline{\underline{R}}_z(\alpha) \qquad [\alpha \text{ zuerst!}]$$

für geeignet gewählte α, β, γ (sog. <u>Eulerwinkel</u>).

[NICHT analog für zugehörige passive Trafo $\underline{\underline{R}}^T = \underbrace{\underline{\underline{R}}^T_z(\gamma)}_{= R_z(-\gamma)}\, \underline{\underline{R}}^T_x(\beta)\, \underline{\underline{R}}^T_z(\alpha)$. usw]

Anschauliche Begründung: [Erinnerung (S. 4.2): $\underline{\underline{R}}$ vollst. festgelegt durch Wirkung auf Basisvektoren]



Schlusswort:

Matrizen wichtig für:

- lin. Operatoren
- Koordinatentrafos
- lin. Gleichungen
- viele weitere Beisp.: später im Studium