4.3 Transponierte Matrix

Def: Sei $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-Matrix mit Matrix-Elementen A_{jk}.

Dann definieren wir eine neue Matrix $\underline{\underline{A}}^T$ („transponierte Matrix") durch ihre Matrix-Elemente

$$A^T_{jk} := A_{kj} \qquad \forall\, j,k = 1,\dots,n$$

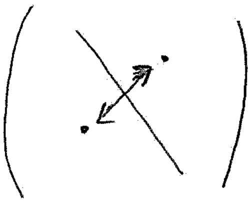
$\Leftrightarrow$ Vertauschung von Zeilen und Spalten:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ Vertauschung von Zeilen- und Spaltenvektoren

$\Leftrightarrow$ Spiegelung an der Diagonalen:



<u>Folgerungen</u>:

- $(\underline{\underline{A}}^T)^T = \underline{\underline{A}}$
- $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^T = \underline{\underline{A}}^T + \underline{\underline{B}}^T$
- $(\lambda \underline{\underline{A}})^T = \lambda \underline{\underline{A}}^T \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$
- $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^T = \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^T$

Bew: Übungen

Sei $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} := \underline{\underline{A}}\vec{u}$, $\vec{z} := \underline{\underline{A}}^T \vec{v}$

$$\Rightarrow \quad y_j = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} u_k \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

$$z_j = \sum_{k=1}^{n} A^T_{jk} v_k \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \quad z_k = \sum_{j=1}^{n} A^T_{kj} v_j \quad \forall k = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \vec{y} \cdot \vec{v} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{y_j}_{\sum_{k=1}^{n} A_{jk} u_k} v_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \underbrace{A_{jk}}_{A^T_{kj}} v_j$$

$$= \sum_{k=1}^{n} u_k \underbrace{\sum_{j=1}^{n} A^T_{kj} v_j}_{z_k} = \sum_{k=1}^{n} u_k z_k = \vec{u} \cdot \vec{z}$$

Fazit:

$$\underline{\underline{(\underline{\underline{A}}\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\underline{\underline{A}}^T \vec{v})}} \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

(wichtigste Eigenschaft von $\underline{\underline{A}}^T$)

4.4 Orthogonale Matrizen

<u>Def</u>: $\underline{\underline{R}}$ heisst <u>orthogonale Matrix</u> $\Leftrightarrow$

$$(\underline{\underline{R}}\vec{u})\cdot(\underline{\underline{R}}\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v} \quad \forall\, \vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$$

$\Leftrightarrow$ <u>Skalarprodukt invariant unter $\underline{\underline{R}}$</u>

$\Leftrightarrow$ Winkel zw. Vektoren und Längen von Vektoren unverändert.

$$\underset{\uparrow\ \text{S.4.26}}{\Leftrightarrow} \quad \vec{u}\cdot(\underbrace{\underline{\underline{R}}^T\underline{\underline{R}}}_{=:\underline{\underline{C}}}\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v} \quad \forall\, \vec{u},\vec{v}$$

wähle $\vec{u}=\vec{e}_j$, $\vec{v}=\vec{e}_k$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\vec{e}_j\cdot(\underline{\underline{C}}\vec{e}_k)}_{=C_{jk}} = \underbrace{\vec{e}_j\cdot\vec{e}_k}_{\delta_{jk}}$ $\forall j,k$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{C}} = \mathbb{1}$ $\Leftrightarrow$

$$\underline{\underline{R}}^T\underline{\underline{R}} = \mathbb{1}$$

Def.: $\underline{\underline{O(n)}}$ $\hat{=}$ Menge aller orthogonalen $n \times n$ Matrizen.

Beisp: $\mathbb{1}^T = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}^T = \mathbb{1} \Rightarrow \mathbb{1}^T \mathbb{1} = \mathbb{1} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{1} \in O(n)}}$

Folgerungen:

- Jedes $\underline{\underline{R}} \in O(n)$ ist invertierbar und

  $$\underline{\underline{\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}^T}}$$

- Mit $\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^{-1} = \mathbb{1}$ (siehe S. 4.19) folgt

  $$\underline{\underline{\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^T = \mathbb{1}}} \overset{\underline{\underline{R}} = (\underline{\underline{R}}^T)^T}{\Longrightarrow} \underline{\underline{\underline{\underline{R}}^T \in O(n)}}$$

- Falls $\underline{\underline{\underline{\underline{R}}_1, \underline{\underline{R}}_2 \in O(n)}}$, dann $\underline{\underline{\underline{\underline{R}}_1 \underline{\underline{R}}_2 \in O(n)}}$

  Bew: Übungen

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{O(n) \text{ heisst auch „orthogonale Gruppe"}}}$.

- Wähle $\vec{u} = \vec{e}_j$, $\vec{v} = \vec{e}_k$

Erinnerung: $\underline{\underline{\underline{R}\,\vec{e}_k}} \underset{\uparrow}{=} \underline{\underline{\vec{R}^s_k}}$ (Spaltenvektoren) $\forall\, k = 1, \dots, n$

Folgerung 3.) auf S. 4.8

$$\Rightarrow \underbrace{(\underline{\underline{R}}\,\vec{e}_j)}_{\vec{R}^s_j} \cdot \underbrace{(\underline{\underline{R}}\,\vec{e}_k)}_{\vec{R}^s_k} = \vec{e}_j \cdot (\underbrace{\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}}}_{= \mathbb{1}}\,\vec{e}_k) = \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \delta_{jk}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{R}^s_j \cdot \vec{R}^s_k = \delta_{jk}}}$$

$\Leftrightarrow$ die Spaltenvektoren von $\underline{\underline{R}}$ bilden ein „Orthonormalsystem."

(daher der Name „<u>orthogonale Matrix</u>")

- Genauso für $\underline{\underline{R}}^T$ statt $\underline{\underline{R}}$

S. 4.24
$\Leftrightarrow$ Vertauschung von Zeilen- und Spaltenvektoren

$\Rightarrow$
$$\underline{\underline{\vec{R}_j^z \cdot \vec{R}_k^z = \delta_{jk}}}\ .$$

- Auf S. 4.22 gefunden: Falls $\underline{\underline{A}}$ invertierbar, dann

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} u_k \vec{A}_k^s \quad \text{mit} \quad u_k = \left(\overrightarrow{A^{-1}}\right)_k^z \cdot \vec{v} \qquad \forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow$ $\vec{A}_1^s, \dots, \vec{A}_n^s$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^n$

Jetzt: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}$

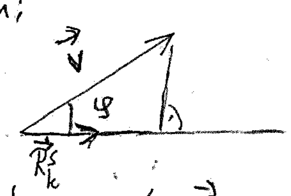
$\Rightarrow$ Mit $\vec{R}_j^s \cdot \vec{R}_k^s = \delta_{jk}$ folgt: die Spaltenvektoren $\vec{R}_1^s, \dots, \vec{R}_n^s$ von $\underline{\underline{R}}$ bilden eine <u>Orthonormalbasis (ONB)</u>

$\Rightarrow$ Mit $\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}^T$ folgt: $\left(\overrightarrow{R^{-1}}\right)_k^z = \left(\overrightarrow{R^T}\right)_k^z = \vec{R}_k^s$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} u_k \vec{R}^s_k}} \qquad \forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

$$\underline{\underline{u_k = \vec{R}^s_k \cdot \vec{v}}} \qquad -\text{"}-$$

Anschaulich:



$$u_k = \underbrace{|\vec{R}^s_k|}_{1} \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi \quad \hat{=} \text{ Projektion von } \vec{v} \text{ in Richtung } \vec{R}^s_k$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \vec{R}^s_k \left(\vec{R}^s_k \cdot \vec{v}\right)}_{} \qquad \forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

„wirkt auf $\vec{v}$ wie $\mathbb{1}$": sog. „Zerlegung der $\mathbb{1}$"

Nochmals: gilt für bel. $\underline{\underline{R}} \in O(n)$ und bel. $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$!

- Speziell für $\underline{\underline{R}} = \mathbb{1}$: $\vec{R}^s_k = \vec{e}_k$

Bew:

- Falls $(\underline{\underline{A}}\vec{v})\cdot(\underline{\underline{A}}\vec{v}) = \vec{v}\cdot\vec{v} \quad \forall \vec{v}\in\mathbb{R}^n$ (d.h. Norm $\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$ invariant unter $\underline{\underline{A}}$) dann folgt $(\underline{\underline{A}}\vec{u})\cdot(\underline{\underline{A}}\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v} \quad \forall \vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{A}}\in O(n)$.

Bew: ev. in LAP.

- [Physik. Interpretation:] Alle $\underline{\underline{R}}\in O(n)$ sind Drehungen oder Spiegelungen in $\mathbb{R}^n$ oder Kombinationen davon (z.B. erst drehen, dann spiegeln, dann nochmals drehen usw).

Details & Bew: schwierig!

- $\underline{\underline{SO(n)}}$ $\hat{=}$ Menge aller „reinen Drehungen" (ohne Spiegelungen)

bzw. aller „Drehmatrizen" $\underline{\underline{R}}$:   :

sog. „**s**pezielle **o**rthogonale Gruppe".

Später mehr.

- Erinnerung: „passive Trafo" $\hat{=}$ Darstellung desselben Vektors in verschiedenen Basen (vgl. S. 4.23).

Hier (d.h. für $\underline{\underline{R}} \in O(n)$):

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} v_k \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{n} u_k \vec{R}_k^s$$

Darst. von $\vec{v}$ in „alter ONB"   Darst. von $\vec{v}$ in „neuer ONB"

$\Rightarrow$ neue ONB geht aus alter ONB durch Drehung, Spiegelung oder Kombination daraus hervor, ebenso für ONB's für 2 verschiedene $\underline{\underline{R}}$'s.