4.1 Multiplikation von Matrizen

Betrachte 2 lin. Op. $A, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Definiere : $C(\vec{v}) := A\left(B(\vec{v})\right)$ (Verkettung/Verknüpfung von A und B)

$\Longrightarrow$ auch C ist lin. Op. (Bew: Ü 40)

Wie vorhin : $\vec{y} := B(\vec{v}) = \underline{\underline{B}}\,\vec{v}$

$\vec{z} := A(\vec{y}) = \underline{\underline{A}}\,\vec{y}$

$\Longrightarrow \quad \vec{z} = A\left(B(\vec{v})\right) = C(\vec{v}) = \underline{\underline{C}}\,\vec{v}$

Äquivalent (komponentenweise):

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} B_{jk} v_k \quad , \quad j = 1,\dots,n$$

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} y_j \quad , \quad i = 1,\dots,n$$

$$\Rightarrow \quad z_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \sum_{k=1}^{n} B_{jk} v_k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vorkurs}}}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} \right) v_k$$

Andererseits: $$z_i = \sum_{k=1}^{n} C_{ik} v_k \quad , \quad i = 1,\dots,n$$

Muss für bel. v_k gelten $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk}}}$$

Daher definiert man: das Produkt $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ ist per Def.

die Matrix $\underline{C} := \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ mit Matrix-Elementen

$$\boxed{C_{ik} := \sum_{j=1}^{n} \underbrace{A_{ij}\, B_{jk}}}$$

„i-te Zeile von $\underline{\underline{A}}$ mal k-te Spalte von $\underline{\underline{B}}$":

$$\begin{pmatrix} & \vdots & \\ A_{i1} & \cdots & A_{in} \\ & \vdots & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & B_{1k} & \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ & B_{nk} & \end{pmatrix}$$

i-te Zeile: $\vec{A}_i^{z\,T}$

k-te Spalte $\vec{B}_k^{s}$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{C_{ik} = \vec{A}_i^{z} \cdot \vec{B}_k^{s}}}$$

Spezialfall: $\vec{B}(\vec{v}) = \vec{I}(\vec{v}) \Rightarrow B_{jk} = I_{jk} = \delta_{jk}$

$$\Rightarrow C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \underbrace{I_{jk}}_{\delta_{jk}} = A_{ik}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{C}} := \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{A}} \qquad \forall\, \underline{\underline{A}}$$

genauso $\quad \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \quad \forall\, \underline{\underline{A}}$

Daher ab jetzt oft auch $\mathbb{1}$ (oder 1) statt $\underline{\underline{I}}$ benutzt.

Präsenzübung :

Sei $n=2$, $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \ ?$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 2 & 1\cdot 3 + 2\cdot 1 \\ (-3)\cdot 0 + 4\cdot 2 & (-3)\cdot 3 + 4\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} = \ ? \quad = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -9 & 12 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ im Allg. $\boxed{\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} \neq \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}}$! (nicht kommutativ)

Per Def: $\quad A(B(\vec{v})) =: C(\vec{v})$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\vec{v}) = \underline{\underline{C}}\,\vec{v} = (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\,\vec{v}$ (Assoziativgesetz)

$=: \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\vec{v}$ (keine Klammern, da egal; $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}, \vec{v}$ bel.)

Analog (o. Bew): $\quad \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{G}}) = (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\,\underline{\underline{G}} =: \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{G}}$

($\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}, \underline{\underline{G}}$ bel.).

4.2 Matrix-Inversion

Def: Sei $\underline{\underline{A}}$ gegeben. Falls ein $\underline{\underline{B}}$ existiert mit

$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \mathbb{1}$, dann heisst $\underline{\underline{A}}$ <u>invertierbar</u>

und $\underline{\underline{B}}$ wird bezeichnet als $\underline{\underline{A}}^{-1}$ (<u>inverse Matrix</u>),

d.h.

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \mathbb{1} \qquad \left(= \underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Beisp.: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Ansatz: $\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot a + 2c & 1\cdot b + 2d \\ 0\cdot a + 3c & 0\cdot b + 3d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad a + 2c = 1 \qquad \Longrightarrow a = 1$$

$$3c = 0 \qquad \Rightarrow c = 0$$

$$b + 2d = 0 \qquad \Rightarrow b = -2d \quad \Rightarrow b = -\tfrac{2}{3}$$

$$3d = 1 \qquad \Rightarrow d = 1/3$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

<u>Folgerungen</u> (Beweise und weitere Details: Übungen sowie Vorlesung „lineare Algebra für Physik" (LAP)):

- Falls Inverse existiert, dann ist sie eindeutig.

- $\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \mathbb{1}$ $\Rightarrow$ $(\underline{\underline{A}}^{-1})^{-1} = \underline{\underline{A}}$

- Die „meisten" $\underline{\underline{A}}$ haben eine Inverse(*), aber nicht alle.

Beisp: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, Ansatz: $\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kann niemals $= \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sein!

- Falls $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ invertierbar, dann auch $\underline{\underline{C}} := \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ und es gilt $\underline{\underline{C}}^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}$

(*) z.B. für zufällig gezogene A_{jk} mit Wahrscheinlichkeit 1.

- Betrachte die Gl.

$$\underline{\underline{A}}\,\vec{x} = \vec{y},$$

wo $\underline{\underline{A}}$ und $\vec{y}$ „gegeben“, $\vec{x}$ „gesucht“.

$\Leftrightarrow$ n <u>lineare Gl'en mit n Unbekannten</u>:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{jk}\, x_k = y_j \quad , \quad j = 1,\dots,n$$

Falls $\underline{\underline{A}}^{-1}$ existiert, folgt $\underbrace{\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}}_{\mathbb{1}}\,\vec{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\vec{y}$ $\Leftrightarrow$

$$\vec{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\vec{y} \qquad \text{(eindeutige Lösung).}$$

Falls $\underline{\underline{A}}^{-1}$ <u>nicht</u> existiert: entweder keine oder unendl. viele Lösungen (weiteres dazu: LAP).

- Folgerung 4.) von S. 4.8 (mit $\vec{u}$ statt $\vec{v}$):

$$\underline{\underline{A}}\,\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} u_k \vec{A}^s_k \qquad \forall\ \vec{u} \in \mathbb{R}^n$$

Falls $\underline{\underline{A}}^{-1}$ existiert: sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ beliebig aber fest und

$$\vec{u} := \underline{\underline{A}}^{-1}\vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \underline{\underline{A}}\,\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} u_k \vec{A}^s_k$$

Folgerung 5.) von S. 4.8: $\underline{\underline{A}}\,\vec{v} \underset{m=n}{\overset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} \vec{A}^z_1 \cdot \vec{v} \\ \vdots \\ \vec{A}^z_n \cdot \vec{v} \end{pmatrix}$

Analog: $\underline{\underline{A}}^{-1}\vec{v} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{(A^{-1})}^z_1 \cdot \vec{v} \\ \vdots \\ \overrightarrow{(A^{-1})}^z_n \cdot \vec{v} \end{pmatrix} \underset{\text{siehe oben}}{\overset{\uparrow}{=}} \vec{u}$

Fazit: man kann jedes $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ schreiben als

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} u_k \vec{A}^s_k \qquad (*)$$

mit eindeutigen Koeffizienten

$$u_k = (\vec{A^{-1}})^z_k \cdot \vec{v} \quad , \quad k = 1, \dots, n$$

$\Leftrightarrow$ $\vec{A}^s_1, \dots, \vec{A}^s_n$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^n$ (vgl. Kap. 1, S. 1.6)

und $(*)$ ist die „Darstellung von $\vec{v}$" in dieser Basis.

Bem:

- Im Gegensatz zur Basis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ gilt aber im Allg. <u>nicht</u> mehr $\vec{A}^s_j \cdot \vec{A}^s_k = \delta_{jk}$

- $\mathbb{R}^n$ hat also viele Basen und $\vec{v}$ viele „Darstellungen".

- Ursprünglich beschreibt A eine Abbildung eines Vektors $\vec{v}$ auf einen neuen Vektor $A(\vec{v}) = \underline{\underline{A}}\,\vec{v}$:

  sog. „<u>aktive Trafo</u>".

  Hier dagegen wird derselbe Vektor $\vec{v}$ in verschiedenen Basen (oder „Koordinatensystemen") dargestellt:

  sog. „<u>passive Trafo</u>".