1. Zweidimensionale Bewegung (30 P.)

i. Vorbereitung (6 P.)

Die Euler–Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} \quad \forall i \tag{1}$$

mit der Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ und den verallgemeinerten Koordinaten q_i und Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$.

Diese Gleichungen können aus dem *Hamilton-Prinzip* (Extremalprinzip) hergeleitet werden: für die physikalisch realisierte Bewegung ist die Wirkung

$$S \equiv \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}\big(t, \{q_i(t)\}, \{\dot{q}_i(t)\}\big)\,\mathrm{d}t$$

extremal.

ii. (24 P.)

a) **(9 P.)** In Polarkoordinaten (r,θ) lautet die Position der Punktmasse $\vec{x}(t) = r(t)\,\vec{\mathrm{e}}_r(t)$, woraus die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{\mathrm{e}}_r + r\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{e}}_\theta$$

folgt, wobei $\mathrm{d}\vec{\mathrm{e}}_r/\mathrm{d}\theta = \vec{\mathrm{e}}_\theta$ benutzt wurde. Dann ist ihre kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\big).$$

Unter Verwendung der angegebenen potentiellen Energie lautet die Standard-Lagrange-Funktion des Systems

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\big) - V_0\ln\frac{r}{r_0}. \tag{2}$$

Die entsprechenden Euler–Lagrange-Bewegungsgleichungen sind einerseits

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} \quad\Leftrightarrow\quad mr\dot{\theta}^2 - \frac{V_0}{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(m\dot{r}\big) = m\ddot{r} \tag{3a}$$

für die Radialkoordinate und

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} \quad\Leftrightarrow\quad 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(mr^2\dot{\theta}\big) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} \tag{3b}$$

für die Winkelkoordinate.

b) **(10 P.)** Aus der Lagrange-Funktion (2) folgen die verallgemeinerten Impulse, und zwar

$$p_r \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m\dot{r} \quad\text{und}\quad p_\theta \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}. \tag{4}$$

Damit lautet die Hamilton-Funktion des Systems

$$\mathcal{H} = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\big) + V_0\ln\frac{r}{r_0},$$

d.h. noch

$$\mathcal{H} = \frac{(p_r)^2}{2m} + \frac{(p_\theta)^2}{2mr^2} + V_0\ln\frac{r}{r_0}. \tag{5}$$

Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen sind dann

$$\dot{r} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad\text{und}\quad \dot{\theta} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \tag{6a}$$

äquivalent zu den Beziehungen (4), und

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial r} = \frac{(p_\theta)^2}{mr^3} - \frac{V_0}{r} \quad\text{und}\quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta} = 0. \tag{6b}$$

c) **(5 P.)** Die Bewegungsgleichung für p_θ ist eine Erhaltungsgleichung — eigentlich ist p_θ der Betrag des Drehimpulses um den Nullpunkt des Koordinatensystems. Die Erhaltung dieses Drehimpulses folgt aus der Invarianz der Physik bzw. der Lagrange-Funktion des Systems unter Drehungen um den Nullpunkt (Noether-Theorem).

2. Bewegung eines Massenpunktes auf einer Zykloide (30 P.)

i. **(4 P.)** Insgesamt könnte der Massenpunkt drei (Translations-)Freiheitsgrade haben. Die Bewegung soll in der (x,z)-Ebene bleiben, entsprechend einer ersten Zwangsbedingung $y=0$, und entlang der Zykloide[1] $x = R\arccos(1-z/R)+\sqrt{2Rz-z^2}$ stattfinden, entsprechend einer zweiten Zwangsbedingung. Somit bleibt ein einziger Freiheitsgrad übrig.

ii. **(8 P.)** Aus der Parametrisierung

$$x(s) = R(s+\sin s) \quad , \quad z(s) = R(1-\cos s) \quad \text{mit } -\frac{\pi}{2} \le s \le \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

der Zykloide folgen

$$\dot{x} = R\dot{s}(1+\cos s) \quad \text{und} \quad \dot{z} = R\dot{s}\sin s.$$

Dann lautet die kinetische Energie des Massenpunkts

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mR^2\dot{s}^2\left[(1+\cos s)^2+(\sin s)^2\right].$$

Unter Verwendung von $\cos^2+\sin^2=1$ ist der Term in eckigen Klammern gleich $2+2\cos s$, woraus

$$T = mR^2\dot{s}^2(1+\cos s) = 2mR^2\dot{s}^2\cos^2\frac{s}{2}.$$

folgt. Die potentielle Energie des Massenpunkts im Schwerefeld $-g\,\vec{e}_z$ ist

$$V = mgz = mgR(1-\cos s) = 2mgR\sin^2\frac{s}{2}.$$

Somit ergibt sich die Standard-Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(s,\dot{s}) = T - V = 2mR^2\dot{s}^2\cos^2\frac{s}{2} - 2mgR\sin^2\frac{s}{2}. \tag{8}$$

iii. **(8 P.)** Mit der Substitution $q \equiv 4R\sin\frac{s}{2}$ gilt $\dot{q} = 2R\dot{s}\cos\frac{s}{2}$, so dass die Lagrange-Funktion (8) zu

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{mg}{8R}q^2 \tag{9}$$

wird. Man erkennt die Form der Lagrange-Funktion eines harmonischen Oszillators.

Die entsprechende Euler–Lagrange-Bewegungsgleichung ist [vgl. Gl. (1)]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{q} = -\frac{mg}{4R}q$$

d.h. nach Vereinfachungen

$$\ddot{q} + \frac{g}{4R}q = 0. \tag{10}$$

Sei $\omega \equiv \sqrt{\frac{g}{4R}}$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (10) ist

$$q(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{11}$$

mit zwei Konstanten A, B.

Bemerkung: Die Periodendauer $\mathcal{T} = 2\pi/\omega$ der harmonischen Schwingung von $q(t)$ ist unabhängig von der Amplitude. Dies führt wiederum für $x(t)$ zu einer periodischen Bewegung, deren Periodendauer auch immer $2\pi/\omega$ ist („Tautochronie“ der Zykloide).

[1] Seien Sie neugierig: `https://de.wikipedia.org/wiki/Zykloide`.

iv. **(10 P.)** Der zu q kanonisch konjugierte Impuls p wird durch

$$p \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \tag{12}$$

gegeben. Dann ist die Hamilton-Funktion des Systems

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{mg}{8R}q^2.$$

Dabei lässt sich der erste Term auch als $p^2/2m$ umschreiben, d.h.

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{mg}{8R}q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \tag{13}$$

Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen lauten

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}, \tag{14a}$$

was äquivalent zur Gl. (12) ist, und

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\frac{mg}{4R}q = -m\omega^2 q. \tag{14b}$$

Die entsprechenden Phasenraumtrajektorien — in der (q,p)-Ebene — sind Ellipsen.

3. Newtonsche Mechanik mit Reibung und Lorentz-Kraft **(25 P.)**

Aus der angegebenen Bahnkurve $\vec{x}(t) = R\big[C(t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + S(t)\,\vec{\mathrm{e}}_y\big]$ der Punktladung folgert man ihre Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = R\big[\dot{C}(t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + \dot{S}(t)\,\vec{\mathrm{e}}_y\big] = R\dot{f}(t)\big[-S(t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + C(t)\,\vec{\mathrm{e}}_y\big], \tag{15}$$

wobei die Ableitungen $\mathrm{d}[\cos f(t)]/\mathrm{d}t = -\dot{f}(t)\sin[f(t)]$ und $\mathrm{d}[\sin f(t)]/\mathrm{d}t = \dot{f}(t)\cos[f(t)]$ benutzt wurden. Man sieht, dass $\vec{v}(t)$ senkrecht auf $\vec{x}(t)$ ist .

Diese Geschwindigkeit und das Magnetfeld $\vec{B} = B(t)\,\vec{\mathrm{e}}_z$ führen zur Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_{\mathrm{L}}(t) = q\vec{v}(t) \times \vec{B}(t) = qRB(t)\dot{f}(t)\big[S(t)\,\vec{\mathrm{e}}_y + C(t)\,\vec{\mathrm{e}}_x\big] = qB(t)\dot{f}(t)\,\vec{x}(t). \tag{16}$$

Wiederum ist die Beschleunigung der Punktladung

$$\dot{\vec{v}}(t) = R\ddot{f}(t)\big[-S(t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + C(t)\,\vec{\mathrm{e}}_y\big] + R\dot{f}(t)^2\big[-C(t)\,\vec{\mathrm{e}}_x - S(t)\,\vec{\mathrm{e}}_y\big] = \frac{\ddot{f}(t)}{\dot{f}(t)}\vec{v}(t) - \dot{f}(t)^2\vec{x}(t), \tag{17}$$

wobei $\dot{f}(t) \neq 0$ angenommen wurde. Mit der Lorentz-Kraft, der Reibungskraft $\vec{F}_{\mathrm{R}}(t) = -m\gamma\vec{v}(t)$ und dieser Beschleunigung lautet das zweite newtonsche Gesetz

$$m\dot{\vec{v}}(t) = \vec{F}_{\mathrm{L}}(t) + \vec{F}_{\mathrm{R}}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m\ddot{f}(t)}{\dot{f}(t)}\vec{v}(t) - m\dot{f}(t)^2\vec{x}(t) = qB(t)\dot{f}(t)\,\vec{x}(t) - m\gamma\vec{v}(t). \tag{18}$$

Da $\vec{x}(t)$ und $\vec{v}(t)$ orthogonal sind, kann man ihre jeweiligen Koeffizienten auf beiden Seiten der Gleichung einfach gleich setzen:

$$-m\dot{f}(t)^2 = qB(t)\dot{f}(t) \quad \text{und} \quad \frac{m\ddot{f}(t)}{\dot{f}(t)} = -m\gamma. \tag{19}$$

Die zweite Gleichung lautet noch $\ddot{f}(t) + \gamma\dot{f}(t) = 0$, was nach einer ersten Integration $\dot{f}(t) = A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}$ mit einer Konstanten A ergibt — somit ist $\dot{f}(t)$ eigentlich immer ungleich Null, wie angenommen wurde. Nach erneuter Integration kommt

$$f(t) = -\frac{A}{\gamma}\,\mathrm{e}^{-\gamma t} + B$$

mit einer zweiten Konstanten B: um der Anfangsbedingung $f(0) = 0$ zu genügen, soll $B = A/\gamma$ sein. Dazu führt Gl. (15) zu

$$\vec{v}(0) = R\dot{f}(0)\big[-S(0)\,\vec{\mathrm{e}}_x + C(0)\,\vec{\mathrm{e}}_y\big] = RA\,\vec{\mathrm{e}}_y.$$

Der Vergleich mit der Anfangsbedingung $\vec{v}(0) = v_0\,\vec{\mathrm{e}}_y$ führt zu $A = v_0/R$:

$$f(t) = \frac{v_0}{\gamma R}\big(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t}\big). \tag{20}$$

Schließlich kommt aus der ersten Gleichung von Gl. (19) nach Division durch $\dot{f}(t) \neq 0$

$$B(t) = -\frac{m}{q}\dot{f}(t) = -\frac{mv_0}{qR}\,\mathrm{e}^{-\gamma t}. \tag{21}$$

4. Elektrostatik: parallele Kreisringe (20 P.)

Da die Gesamtladung der zwei Kreisringe $Q = q - q = 0$ ist, lautet das elektrostatische Potential bis zum Dipolmoment

$$\Phi(\vec{r}) \simeq \frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \tag{22}$$

wobei $\vec{P}$ das Dipolmoment bezeichnet:

$$\vec{P} \equiv \int \vec{r}\,'\rho_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'.$$

In Zylinderkoordinaten lautet die Ladungsverteilung des Systems

$$\rho_{\text{el.}}(r',\theta',z') = \frac{q}{2\pi R}\delta(r'-R)\big[\delta(z'-b) - \delta(z'+b)\big], \tag{23}$$

woraus sich

$$\vec{P} = \int \vec{r}\,'\rho_{\text{el.}}(r',\theta',z')\,r'\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\theta'\,\mathrm{d}z'$$

berechnen lässt:

$$\vec{P} = \frac{q}{2\pi R}\int \begin{pmatrix} r'\cos\theta \\ r'\sin\theta \\ z' \end{pmatrix} \delta(r'-R)\big[\delta(z'-b) - \delta(z'+b)\big]\,r'\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\theta'\,\mathrm{d}z' = \frac{q}{2\pi R}\begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 2\pi R(b-(-b)) \end{pmatrix}$$

d.h.

$$\vec{P} = 2qb\,\vec{\mathrm{e}}_z, \tag{24}$$

wie man auch ohne Berechnung finden könnte.

5. Elektrodynamik im Vakuum (20 P.)

i. (8 P.) Die Maxwell-Gleichungen in Anwesenheit von Quelltermen sind

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(t,\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho_{\text{el.}}(t,\vec{r}) \tag{25a}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(t,\vec{r}) = 0 \tag{25b}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{r}) + \frac{\partial\vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t} = \vec{0} \tag{25c}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{r}) - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t} = \mu_0\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r}), \tag{25d}$$

mit $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$

ii) (12 P.) Das Einsetzen des Ansatzes

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \alpha\,\vec{\mathrm{e}}_x\cos(\omega t - kz) \quad , \quad \vec{B}(t,\vec{r}) = \beta\,\vec{\mathrm{e}}_y\cos(\omega t - qz) \tag{26}$$

in die Maxwell-Gleichungen mit $\rho_{\text{el.}} = 0$, $\vec{\jmath}_{\text{el.}} = \vec{0}$ gibt

$$\begin{aligned}
0 &= 0 \\
0 &= 0 \\
\frac{\partial E_x}{\partial z}\,\vec{\mathrm{e}}_y + \frac{\partial B_y}{\partial t}\,\vec{\mathrm{e}}_y = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha k \sin(\omega t - kz) - \beta\omega\sin(\omega t - qz) = 0 \\
-\frac{\partial B_y}{\partial z}\,\vec{\mathrm{e}}_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}\,\vec{\mathrm{e}}_x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\beta q\sin(\omega t - qz) + \frac{\alpha\omega}{c^2}\sin(\omega t - kz) = 0
\end{aligned}$$

Damit die Sinus-Terme gleich oszillieren, muss $k = q$ gelten. Dann führen die zwei letzten Gleichungen zu

$$\alpha k = \beta\omega \quad , \quad \beta q = \beta k = \frac{\alpha\omega}{c^2}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\alpha = \beta\omega/k$, was nach Einsetzen in die zweite zu $k = \omega^2/kc^2$ führt, d.h.

$$k = \pm\frac{\omega}{c}. \tag{27a}$$

Mit diesem Ergebnis lautet die erste Gleichung dann

$$\pm\frac{\alpha}{c} = \beta. \tag{27b}$$

6. Magnetisches Dipolmoment und Drehimpuls **(15 P.)**

i. **(5 P.)** Die Stromdichte einer Verteilung bestehend aus N identischen bewegten Punktladungen mit Masse m und elektrischer Ladung q ist

$$\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r}) = \sum_{a=1}^{N} q\vec{v}_a(t)\,\delta^{(3)}\big(\vec{r} - \vec{x}_a(t)\big). \tag{28}$$

ii. **(10 P.)** Das Einsetzen dieser Stromverteilung in das magnetische Dipolmoment gibt zuerst

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}}\vec{r}\times\vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3\vec{r} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}}\vec{r}\times\sum_{a=1}^{N} q\vec{v}_a(t)\,\delta^{(3)}\big(\vec{r}-\vec{x}_a(t)\big)\,\mathrm{d}^3\vec{r} = \frac{q}{2}\sum_{a=1}^{N}\left[\int_{\mathcal{V}}\vec{r}\,\delta^{(3)}\big(\vec{r}-\vec{x}_a(t)\big)\,\mathrm{d}^3\vec{r}\right]\times\vec{v}_a(t),$$

wobei die Linearität des Integrals benutzt wurde Das Integral in eckigen Klammern ergibt $\vec{x}_a(t)$, d.h.

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2}\sum_{a=1}^{N}\vec{x}_a(t)\times\vec{v}_a(t) = \frac{q}{2m}\sum_{a=1}^{N} m\vec{x}_a(t)\times\vec{v}_a(t).$$

Dabei ist $m\vec{x}_a(t)\times\vec{v}_a(t)$ gerade der Drehimpuls der a-ten Punktladung, d.h. die Summe ist gleich dem Gesamtdrehimpulses des Systems:

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m}\vec{L}. \tag{29}$$