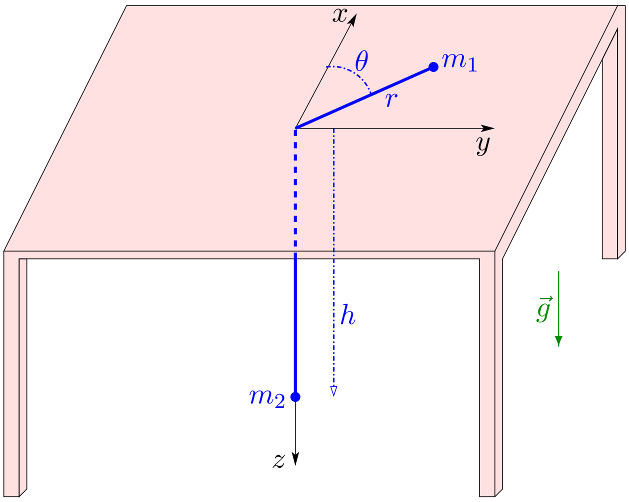
1. Zwei-Massen-System **15 P.**



i. (4 P.) Insgesamt könnten zwei Massenpunkte in drei Dimensionen $6 = 2 \times 3$ Translations-Freiheitsgrade haben. Hier darf sich die Masse m_1 bzw. m_2 nicht in z-Richtung bzw. in x- oder y-Richtung bewegen, entsprechend insgesamt 3 holonomen Zwangsbedingungen. Dazu sind die Höhe h der Masse m_2 und der Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Masse m_1 vom Loch über die vierte Bedingung $r + h = \ell$ verknüpft. Insgesamt bleiben $2 = 6 - 4$ Freiheitsgrade — und zwar hiernach die Höhe h und der Winkel θ.

ii. (8 P.) Eine mögliche Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ ist die Differenz aus kinetischer und Potentialenergie $T - V$ des Systems.

Seien $x(t)$, $y(t)$ die Koordinaten der Position der Masse m_1:

$$x(t) = r(t) \cos\theta(t) = [\ell - h(t)] \cos\theta(t), \qquad y(t) = r(t) \sin\theta(t) = [\ell - h(t)] \sin\theta(t).$$

Die Geschwindigkeit der Masse m_1 ist dann

$$\dot{x}(t) = -\dot{h}(t) \cos\theta(t) - [\ell - h(t)]\dot{\theta}(t) \sin\theta(t), \qquad \dot{y}(t) = -\dot{h}(t) \sin\theta(t) + [\ell - h(t)]\dot{\theta}(t) \cos\theta(t).$$

Daraus folgt die kinetische Energie von m_1:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \cdots = \frac{1}{2} m_1 [\dot{h}^2 + (\ell - h)^2 \dot{\theta}^2].$$

Die Potentialenergie von m_1 bleibt konstant, so lange m_1 noch auf dem Tisch ist, und kann somit weggelassen werden.

Wiederum lauten die kinetische und Potentialenergie der Masse m_2

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{h}^2, \qquad V_2 = -m_2 g h.$$

Insgesamt ist eine mögliche Lagrange-Funktion des Systems

$$\mathcal{L} = T_1 + T_2 - V_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{h}^2 + \frac{1}{2} m_1 (\ell - h)^2 \dot{\theta}^2 + m_2 g h.$$

(Dazu kann man noch eine totale Zeitableitung hinzufügen, die bei den Bewegungsgleichungen keine Rolle spielen wird.)

iii. (3 P.) Allgemein lauten die Euler–Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad \forall i \tag{1}$$

mit $\mathcal{L}$ der Lagrange-Funktion und q_i bzw. $\dot{q}_i$ den verallgemeinerten Koordinaten bzw. Geschwindigkeiten.

Im Fall $q_i = \theta$ gilt $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$ (zyklische Koordinate), so dass die Bewegungsgleichung einfach

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m_1(\ell-h)^2\dot{\theta}\right] = 0$$

ist, entsprechend der Erhaltung des Drehimpulses. Dies lautet noch

$$m_1(\ell-h)^2\ddot{\theta} - 2m_1(\ell-h)\dot{\theta}\dot{h} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (\ell-h)\ddot{\theta} = 2\dot{\theta}\dot{h} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} = \frac{2\dot{h}}{\ell-h}, \tag{2}$$

was zu $\ln\dfrac{\dot{\theta}(t)}{\dot{\theta}(t_0)} = \ln\left[\dfrac{\ell-h(t)}{\ell-h(t_0)}\right]^2$ führt.

Die Euler–Lagrange-Gleichung (1) für $q_i = h$ lautet

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h} = m_2 g - m_1(\ell-h)\dot{\theta}^2 \quad\text{und}\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{h}} = (m_1+m_2)\dot{h},$$

woraus

$$(m_1+m_2)\ddot{h} = m_2 g - m_1(\ell-h)\dot{\theta}^2 \tag{3}$$

folgt.

2. Pendel mit Hula-Hoop-Reifen **30 P.**

i. „Vorbereitung“ (8 P.)

a) Betrachte man der Einfachheit halber den Fall ein Koordinatensystem mit dem Nullpunkt im Zentrum des Reifens, der in der (x, y)-Ebene liegt. Dann lautet die Massendichteverteilung des Reifens

$$\rho(\vec{r}) = \frac{m}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}\delta(\sqrt{x^2+y^2}-R)\,\delta(z) = \frac{m}{2\pi r}\delta(r-R)\,\delta(z), \tag{4}$$

wobei in der zweiten Gleichung Zylinderkoordinaten benutzt wurden.

b) Das Trägheitsmoment einer Massendichteverteilung $\rho(\vec{r})$ um eine Achse ist

$$I = \int\rho(\vec{r})\,\vec{r}_\perp^{\,2}\,\mathrm{d}^3\vec{r}$$

mit $r_\perp = |\vec{r}_\perp|$ dem Abstand zur Achse.

Die Achse des Hula-Hoop-Reifens sei als z-Achse gewählt: in Zylinderkoordinaten (r, θ, z) ist der Abstand eines Punktes zu dieser Achse einfach $r_\perp = r$. Mit dem Integrationsmaß $\mathrm{d}^3\vec{r} = \mathrm{d}r\,r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ und der Massendichte (4) findet man dann für das Trägheitsmoment um die Kreisachse

$$I = \int\rho(\vec{r})\,r^2\,r\,\mathrm{d}r\,\theta\,\mathrm{d}z = \int\frac{m}{2\pi r}\delta(r-R)\,\delta(z)\,r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = mR^2.$$

c) Steiner'scher Satz: Das Trägheitsmoment eines starren Körpers mit Masse m um eine beliebige Achse im Abstand L von seinem Schwerpunkt ist gegeben durch die Summe aus mL^2 und dem Trägheitsmoment des Körpers um die parallele Drehachse, die durch den Schwerpunkt geht.

Für das Trägheitsmoment des Hula-Hoop-Reifens um eine Drehachse, die parallel zur Kreisachse durch einen Punkt des Kreises durchläuft, ergibt sich $I' = I + mR^2 = 2mR^2$.

ii. Doppelpendel (22 P.)

a) Die Koordinaten der Position des Schwerpunkts sind

$$x = \ell\cos\theta + R\cos\varphi, \qquad y = \ell\sin\theta + R\sin\varphi,$$

entsprechend einer Geschwindigkeit

$$\dot{x} = -\ell\dot{\theta}\sin\theta - R\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \dot{y} = \ell\dot{\theta}\cos\theta + R\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Somit ist die kinetische Energie der Translationsbewegung

$$T_1 = \frac{1}{2}m\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\big) = \cdots = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + m\ell\dot{\theta}R\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi). \tag{5}$$

b) Der Winkel der Drehbewegung des Reifens um seinen Schwerpunkt ist ebenfalls φ. Somit ist die entsprechende kinetische Energie

$$T_2 = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2. \tag{6}$$

c) Die übliche Lagrange-Funktion für das System ist $\mathcal{L} = T - V$. Dabei sind die zwei Beiträge zur kinetischen Energie durch Gl. (5) und (6) gegeben:

$$T = mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + m\ell\dot{\theta}R\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi).$$

Wiederum ist die Potentialenergie

$$V = -mgx = -mg(\ell\cos\theta + R\cos\varphi).$$

Insgesamt gilt also

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mR^2\dot{\varphi}^2 + m\ell\dot{\theta}R\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi) + mg(\ell\cos\theta + R\cos\varphi). \tag{7a}$$

Behaltet man nur Terme bis zur zweiten Ordnung in den Winkeln und ihren Zeitableitungen, so wird diese Funktion zu

$$\mathcal{L} \simeq \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mR^2\dot{\varphi}^2 + m\ell\dot{\theta}R\dot{\varphi} + mg\ell\bigg(1 - \frac{\theta^2}{2}\bigg) + mgR\bigg(1 - \frac{\varphi^2}{2}\bigg), \tag{7b}$$

wobei $\cos x \simeq 1 - x^2/2$ benutzt wurde.

d) Die Euler–Lagrange-Gleichungen für das System lauten

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} \quad\Leftrightarrow\quad -mg\ell\theta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(m\ell^2\dot{\theta} + m\ell R\dot{\varphi}\Big) = m\ell^2\ddot{\theta} + m\ell R\ddot{\varphi} \tag{8a}$$

und

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} \quad\Leftrightarrow\quad -mgR\varphi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(2mR^2\dot{\varphi} + m\ell R\dot{\theta}\Big) = 2mR^2\ddot{\varphi} + m\ell R\ddot{\theta}, \tag{8b}$$

d.h. nach trivialer Umformung (mit $R, \ell \neq 0$)

$$\begin{cases} \ell\ddot{\theta} + R\ddot{\varphi} + g\theta = 0 \\ \ell\ddot{\theta} + 2R\ddot{\varphi} + g\varphi = 0. \end{cases} \tag{9}$$

e) Um die Eigenfrequenzen der Normalmoden des gekoppelten Systems (9) zu finden, macht man den Ansatz $\theta(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, $\varphi(t) = B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. Das Einsetzen in Gl. (9) führt zu

$$\begin{cases} -A\ell\omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - BR\omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + gA\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = 0 \\ -A\ell\omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - 2BR\omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + gB\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = 0 \end{cases}$$

d.h. in Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} g - \ell\omega^2 & -R\omega^2 \\ -\ell\omega^2 & g - 2R\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Damit dieses System nicht-triviale Lösungen hat, muss die Determinante der quadratischen Matrix Null sein, d.h. $(g-\ell\omega^2)(g-2R\omega^2) - R\ell\omega^4 = 0$. Diese Bedingung lässt sich noch in der Form

$$\omega^4 - \frac{2g}{\ell}\left(1+\frac{\ell}{2R}\right)\omega^2 + \frac{g^2}{R\ell} = 0$$

schreiben, entsprechend einer quadratischen Gleichung für ω^2, deren zwei Lösungen durch

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell}\left(1+\frac{\ell}{2R}\right) \pm \sqrt{\frac{g^2}{\ell^2}\left(1+\frac{\ell}{2R}\right)^2 - \frac{g^2}{R\ell}} = \frac{g}{\ell}\left(1+\frac{\ell}{2R}\right) \pm \frac{g}{\ell}\sqrt{1+\frac{\ell^2}{4R^2}}$$

gegeben sind. Im Fall $R = \ell/2$ werden diese Eigenfrequenzen zu $\omega^2 = \frac{g}{\ell}(2\pm\sqrt{2})$.

3. Bewegung auf einer Rotationsfläche **35 P.**

i. **(3 P.)** Insgesamt kann eine Punktmasse 3 Freiheitsgrade haben. Hier stellt die Bedingung, dass die Masse auf der Rotationsfläche bleibt, eine Zwangsbedingung dar, so dass es nur $2 = 3 - 1$ Freiheitsgrade gibt.

ii. Bewegungsgleichungen **(16 P.)**

a) In einem kartesischen System lauten die Koordinaten der Punktmasse

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z \quad \text{mit} \quad r = f(z).$$

Dies liefert die Geschwindigkeit

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta, \quad \dot{z}$$

und somit die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) = \cdots = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right).$$

Dabei gilt $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(z(t)\big) = f'(z)\dot{z}$, d.h.

$$T = \frac{1}{2}m\Big(\big[1+f'(z)^2\big]\dot{z}^2 + f(z)^2\dot{\theta}^2\Big).$$

Mit der Potentialenergie $V = mgz$ ergibt sich dann die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\Big(\big[1+f'(z)^2\big]\dot{z}^2 + f(z)^2\dot{\theta}^2\Big) - mgz. \tag{11}$$

b) Für den Winkel θ lautet die Euler–Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} \quad\Leftrightarrow\quad 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(mf(z)^2\dot{\theta}\Big), \tag{12}$$

entsprechend der Erhaltung des Drehimpulses.

c) Die Euler–Lagrange-Gleichung für die Höhe z ist

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}}.$$

Aus der Lagrange-Funktion (11) folgen

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = mf'(z)f''(z)\dot{z}^2 + mf(z)f'(z)\dot{\theta}^2 - mg$$

und

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} = m\big[1+f'(z)^2\big]\dot{z} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} = 2mf'(z)f''(z)\dot{z}^2 + m\big[1+f'(z)^2\big]\ddot{z},$$

so dass die Bewegungsgleichung

$$mf(z)f'(z)\dot{\theta}^2 - mg = mf'(z)f''(z)\dot{z}^2 + m\big[1 + f'(z)^2\big]\ddot{z}$$

lautet, d.h. noch

$$\ddot{z}\big[1 + f'(z)^2\big] + \dot{z}^2 f'(z)f''(z) = -g + f(z)f'(z)\dot{\theta}^2 = -g + C^2\frac{f'(z)}{f(z)^3}, \tag{13}$$

mit $C \equiv f(z)^2\,\dot{\theta}$ (entsprechend laut der Frage **ii.b)** einer Erhaltungsgröße).

iii. Stabilität von Bahnkurven (16 P.)

a) Für konstante $\dot{\theta}(t) = \Omega_0$ und $z(t) = z_0$, wobei z_0 die Gleichung

$$f'(z_0) = \frac{g}{C^2}f(z_0)^3 = \frac{g}{\Omega_0^2 f(z_0)} \tag{14}$$

erfüllt, gelten sowohl Gl. (12) — da $\dot{\theta}$ und $f(z) = f(z_0)$ zeitunabhängig sind — als auch Gl. (13) — in der die linke Seite wegen $\dot{z} = 0$, $\ddot{z} = 0$ verschwindet.

b) Die Taylor-Entwicklung von $f(z)$ um $z = z_0$ lautet

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \mathcal{O}\big((z - z_0)^2\big).$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{f(z)^3} \simeq \Big[f(z_0) + (z-z_0)f'(z_0)\Big]^{-3} = \frac{1}{f(z_0)^3}\left[1 + (z-z_0)\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right]^{-3} = \frac{1}{f(z_0)^3}\left[1 - 3(z-z_0)\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right].$$

Andererseits gilt $f'(z) \simeq f'(z_0) + (z - z_0)f''(z_0)$ und somit

$$f'(z)^2 \simeq f'(z_0)^2\left[1 + (z-z_0)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\right]^2 = f'(z_0)^2\left[1 + 2(z-z_0)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\right].$$

Setzt man $z - z_0 = \epsilon \sin\omega t$ ein, und benutzt man

$$\dot{z} = \epsilon\omega\cos\omega t, \qquad \ddot{z} = -\epsilon\omega^2\sin\omega t,$$

so lautet Gl. (13) zur Ordnung ϵ

$$-\epsilon\omega^2\sin\omega t\big[1 + f'(z_0)^2\big] = -g + C^2\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^3}\left[1 - \frac{3f'(z_0)}{f(z_0)}\epsilon\sin\omega t + \epsilon\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\sin\omega t\right].$$

Die Ordnung ϵ^0 gibt $0 = -g + C^2 f'(z_0)/f(z_0)^3$, d.h. genau die Beziehung (14). Zur Ordnung ϵ kommt (bis auf den Faktor $\sin\omega t$)

$$-\omega^2\big[1 + f'(z_0)^2\big] = C^2\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^3}\left[\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{3f'(z_0)}{f(z_0)}\right].$$

Schreibt man $C^2 = f(z_0)^4\Omega_0^2$, so lautet diese Beziehung noch

$$\omega^2 = \frac{3f'(z_0)^2 - f(z_0)f''(z_0)}{1 + f'(z_0)^2}\Omega_0^2. \tag{15}$$

c) Für $f(z_0)f''(z_0) < 3f'(z_0)^2$ ist der Bruch in Gl. (15) positiv, d.h. $\omega^2 > 0$. Dann gibt es reelle Lösungen für ω, und die Bahn $z = z_0 + \epsilon\sin\omega t$ ist eine „Schwingung“ um die triviale Bahn $z = z_0$. Die letztere stellt somit ein *stabiles* Gleichgewicht dar.

Dass die Masse sich auch bergauf bewegen kann, statt einfach immer bergab, kommt aus der Erhaltung des Drehimpulses $r^2\dot{\theta}$: wenn r sich ändert, soll sich die Winkelgeschwindigkeit gleichzeitig ändern.

d) Für $f(z_0)f''(z_0) > 3f'(z_0)^2$ ist der Bruch in Gl. (15) negativ, d.h. $\omega^2 < 0$, d.h. formell ist ω rein imaginär. Dann ist $z = z_0 + \epsilon \sin \omega t$ unbegrenzt, d.h. die Bahn $z = z_0$ ist in diesem Fall instabil gegen Störungen. (Das effektive Potential, welches das Verhalten der Bahn gegen Störungen beschreibt, hat eine negative zweite Ableitung, entsprechend einer instabilen Bahn.)

4. Feld einer elektrisch geladenen Kugelschale **15 P.**

Sei ein Koordinatensystem mit dem Nullpunkt im Zentrum der Kugelschale. Wegen der Symmetrie der letzteren ist es sinnvoll, Kugelkoordinaten (r, θ, φ) zu verwenden. Aus der Kugelsymmetrie der Kugelschale kann man sinnvoll annehmen, dass das elektrische Feld nicht von den Winkeln θ, φ abhängt und entlang der radialen Richtung zum Zentrum liegt, d.h. $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\vec{e}_r$ mit $r = |\vec{r}|$ und $\vec{e}_r$ dem Einheitsvektor in Radialrichtung.

Betrachte man jetzt eine Kugel mit Radius a und gleichem Zentrum wie die Kugelschale. In jedem Punkt der Kugelfläche $\partial\mathcal{V}$ ist das elektrische Feld normal, so dass dessen Fluss

$$\Phi_E = \oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathcal{S}} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \big|\vec{E}(\vec{r})\big|\, \mathrm{d}^2\mathcal{S} = E(a) \oint_{\partial\mathcal{V}} \mathrm{d}^2\mathcal{S} = 4\pi a^2 E(a)$$

ist, wobei benutzt wurde, dass das Oberflächenintegral im vorletzten Glied einfach die Oberfläche der Kugel mit Radius a ist.

Dank dem Gauß'schen Gesetz ist der elektrische Fluss mit der Gesamtladung Q_{in} innerhalb des durch $\partial\mathcal{V}$ abgeschlossenen Volumens verknüpft, und zwar über $\Phi_E = Q_{\text{in}}/\epsilon_0$. Hier hängt diese Gesamtladung vom Radius a der Gauß'schen Fläche (Kugel): für $a \geq R$ gilt $Q_{\text{in}} = Q$, für $a < R$ gilt Q_{in}. Somit ergibt sich insgesamt

$$4\pi a^2 E(a) = \begin{cases} Q & \text{für } a \geq R \\ 0 & \text{für } a < R \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad E(a) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} & \text{für } a \geq R \\ 0 & \text{für } a < R. \end{cases}$$

Das elektrostatische Potential folgt dann aus Integration:

$$\Phi(a) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + K_1 & \text{für } a \geq R \\ K_2 & \text{für } a < R \end{cases}$$

mit K_1, K_2 zwei Konstanten. Für die Stetigkeit des Potentials bei $a = R$ soll $K_2 = K_1 + Q/(4\pi\epsilon_0 a)$ gelten. Die übliche Wahl ist dann $K_1 = 0$, entsprechend $\Phi(\infty) = 0$:

$$\Phi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{für } r \geq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{für } r < R. \end{cases}$$

5. Plattensender **25 P.**

Sei das elektrische Feld

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = E_0[\Theta(x)\cos(kx - \omega t) + \Theta(-x)\cos(kx + \omega t)]\vec{e}_y \equiv E_y\,\vec{e}_y \tag{16}$$

mit $\Theta(x)$ der Stufenfunktion und $\omega = ck$.

i. Die Maxwell–Gauß-Gleichung lautet $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon$, wobei die rechte Seite im Vakuum Null ist. Für das Feld (16) gilt in der Tat

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0,$$

weil $E_x = E_z = 0$ und E_y unabhängig von y ist.

ii. Die Maxwell–Faraday-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

liefert die Zeitableitung von der magnetischen Induktion $\vec{B}$ herleiten, und zwar

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \vec{\mathrm{e}}_z.$$

In der Ableitung von E_y nach x treten Ableitungen der Heaviside-Funktion $[\Theta'(x) = \delta(x)]$ auf, die für $x \neq 0$ nicht beitragen werden. Es bleibt

$$\text{für } x \neq 0 \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -kE_0[\Theta(x)\sin(kx - \omega t) + \Theta(-x)\sin(kx + \omega t)].$$

Daraus folgt (bis auf einen zeitabhängigen Beitrag)

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \int^t kE_0\big[\Theta(x)\sin(kx - \omega t) + \Theta(-x)\sin(kx + \omega t)\big]\vec{\mathrm{e}}_z \\
&= \frac{kE_0}{\omega}\big[\Theta(x)\cos(kx - \omega t) - \Theta(-x)\cos(kx + \omega t)\big]\vec{\mathrm{e}}_z \\
&= \frac{E_0}{c}\big[\Theta(x)\cos(kx - \omega t) - \Theta(-x)\cos(kx + \omega t)\big]\vec{\mathrm{e}}_z \equiv B_z\,\vec{\mathrm{e}}_z.
\end{aligned} \tag{17}$$

Für $x = 0$ gibt diese Formel $\vec{B} = \vec{0}$.

iii. Die elektrische Stromdichte lässt sich aus der Maxwell–Ampère-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{\jmath}_{\text{el.}}$$

berechnen. Aus Gl. (17) folgt

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= -\frac{\partial B_z}{\partial x}\vec{\mathrm{e}}_y \\
&= \frac{kE_0}{c}\big[\Theta(x)\sin(kx - \omega t) - \Theta(-x)\sin(kx + \omega t)\big]\vec{\mathrm{e}}_y \\
&\quad + \frac{E_0}{c}\big[\delta(x)\cos(kx - \omega t) + \delta(-x)\cos(kx + \omega t)\big]\vec{\mathrm{e}}_y
\end{aligned}$$

Macht man $x = 0$ in den Termen proportional zu $\delta(x) = \delta(-x)$ und benutzt man $\omega = ck$, so kommt

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\omega E_0}{c^2}\big[\Theta(x)\sin(kx - \omega t) - \Theta(-x)\sin(kx + \omega t)\big]\vec{\mathrm{e}}_y + \frac{2E_0}{c}\cos(\omega t)\delta(x)\,\vec{\mathrm{e}}_y.$$

Wiederum führt Gl. (16) zu

$$\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\omega E_0}{c^2}[\Theta(x)\sin(kx - \omega t) - \Theta(-x)\sin(kx + \omega t)]\vec{\mathrm{e}}_y.$$

Somit gilt

$$\vec{\jmath}_{\text{el.}} = \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] = -\frac{2E_0}{\mu_0 c}\cos(\omega t)\delta(x)\,\vec{\mathrm{e}}_y.$$

6. Eichtransformationen **25 P.**

i. Wissen **(8 P.)** Die Beziehungen zwischen elektromagnetischen Feldern und Potentialen lauten (der Faulheit halber werden die Variablen t, $\vec{r}$ nicht geschrieben)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{18a}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{18b}$$

Eine allgemeine Eichtransformation der Potentiale ist eine gleichzeitige Transformation

$$\Phi \to \Phi' = \Phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{19a}$$

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \tag{19b}$$

mit χ einer beliebigen Funktion von Zeit und Ort.

ii. (17 P.)

a) Die retardierten Potentiale $\Phi_{\text{ret.}}$, $\vec{A}_{\text{ret.}}$ sind Lösungen der Bewegungsgleichungen $\Box\Phi = \rho_{\text{el.}}/\varepsilon_0$ und $\Box\vec{A} = \mu_0\vec{\jmath}_{\text{el.}}$, die in *Lorenz-Eichung*

$$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \tag{20}$$

gelten.

b) Sei χ die „Eichfunktion" der Eichtransformation von $\Phi_{\text{ret.}}$ nach Φ. Laut Gl. (19a) gilt

$$\Phi = \Phi_{\text{ret.}} - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial\chi}{\partial t} = \Phi_{\text{ret.}} - \Phi.$$

Die Integration beider Seite dieser Gleichung nach der Zeit von einem beliebigen Anfangspunkt t_0 bis zur Zeit t gibt dann

$$\chi(t,\vec{r}) - \chi(t_0,\vec{r}) = \int_{t_0}^{t}\big[\Phi_{\text{ret.}}(t',\vec{r}) - \Phi(t',\vec{r})\big]\,\mathrm{d}t'.$$

Dabei ist $\chi(t_0,\vec{r})$ unwesentlich für die Eichtransformation und kann weggelassen werden. Mit der Wahl $t_0 = -\infty$ ergibt sich die gesuchte Formel

$$\chi(t,\vec{r}) = \int_{-\infty}^{t}\big[\Phi_{\text{ret.}}(t',\vec{r}) - \Phi(t',\vec{r})\big]\,\mathrm{d}t' \tag{21}$$

Aus Gl. (19b) folgt

$$\begin{aligned}\vec{A}(t,\vec{r}) = \vec{A}_{\text{ret.}}(t,\vec{r}) + \vec{\nabla}\chi(t,\vec{r}) &= \vec{A}_{\text{ret.}}(t,\vec{r}) + \vec{\nabla}\int_{-\infty}^{t}\big[\Phi_{\text{ret.}}(t',\vec{r}) - \Phi(t',\vec{r})\big]\,\mathrm{d}t' \\ &= \vec{A}_{\text{ret.}}(t,\vec{r}) + \int_{-\infty}^{t}\big[\vec{\nabla}\Phi_{\text{ret.}}(t',\vec{r}) - \vec{\nabla}\Phi(t',\vec{r})\big]\,\mathrm{d}t'.\end{aligned} \tag{22}$$

Dabei gilt laut Beziehung (18a)

$$\vec{\nabla}\Phi_{\text{ret.}}(t',\vec{r}) = -\vec{E}(t',\vec{r}) - \frac{\partial\vec{A}_{\text{ret.}}(t',\vec{r})}{\partial t},$$

woraus

$$\int_{-\infty}^{t}\vec{\nabla}\Phi_{\text{ret.}}(t',\vec{r})\mathrm{d}t' = -\int_{-\infty}^{t}\vec{E}(t',\vec{r})\mathrm{d}t' - \Big[\vec{A}_{\text{ret.}}(t,\vec{r}) - \vec{A}_{\text{ret.}}(-\infty,\vec{r})\Big].$$

folgt. Eingesetzt in Gl. (22) kommt

$$\begin{aligned}\vec{A}(t,\vec{r}) &= \vec{A}_{\text{ret.}}(-\infty,\vec{r}) - \int_{-\infty}^{t}\vec{E}(t',\vec{r})\mathrm{d}t' - \int_{-\infty}^{t}\vec{\nabla}\Phi(t',\vec{r})\mathrm{d}t' \\ &= \vec{A}_{\text{ret.}}(-\infty,\vec{r}) - \int_{-\infty}^{t}\big[\vec{E}(t',\vec{r})' + \vec{\nabla}\Phi(t',\vec{r})\big]\,\mathrm{d}t'.\end{aligned} \tag{23}$$