

Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen, Vornamen und Matrikelnummer und nummerieren Sie die Blätter

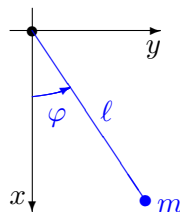
Für die „Diskussionsfragen“ sollten Sie nicht zu viel Text schreiben, sondern sich auf die wichtigen Begriffe / physikalische Ideen / Stichworte fokussieren.

1. Ebenes Pendel mit zeitabhängiger Länge (30 P.)

i. Vorbereitung

- Wie lauten allgemein die Euler–Lagrange-Gleichungen?
- Aus welchem Prinzip werden sie hergeleitet? Definieren Sie die dabei auftretenden Funktionen und physikalischen Größen.

ii. Betrachten Sie ein ebenes Pendel bestehend aus einer Masse m am Ende eines masselosen Stabs dessen Länge ℓ mit der Zeit variieren kann.



- Wie viele Freiheitsgrade gibt es?
- Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion.
- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.
- Angenommen $\ell(t) = \ell_0 + \alpha t$ mit ℓ_0 und α konstanten Zahlen. Zeigen Sie aus dem Ergebnis aus ii.c), dass sich für kleine Ablenkungen $\varphi(t)$ die Differentialgleichung

$$\ell \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{\alpha^2} \varphi = 0$$

ergibt — die Lösung dieser Gleichung wird *nicht* gefragt.

2. Dreidimensionaler harmonischer Oszillator (30 P.)

Die Bewegungsgleichung eines isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillators lautet

$$m \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = -k \vec{x}(t), \quad (1)$$

mit k einer konstanten reellen Zahl. Die Komponenten von $\vec{x}(t)$ bzw. vom zugehörigen Impuls $\vec{p}(t)$ werden mit x_i bzw. p_i mit $i = 1, 2, 3$ bezeichnet. Die Einstein'sche Summenkonvention über doppelt auftretende Indizes wird durchwegs benutzt.

- Folgern Sie aus der Bewegungsgleichung (1) die Erhaltungsgleichung $\frac{dA_{ij}(t)}{dt} = 0$ wobei

$$A_{ij}(t) \equiv \frac{1}{2m} p_i(t) p_j(t) + \frac{1}{2} k x_i(t) x_j(t) \quad \text{für } i, j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Die A_{ij} sind die Komponenten eines symmetrischen Tensors zweiter Stufe \mathbf{A} , des Jauch–Hill–Fradkin (JHF)-Tensors.

ii. Prüfen Sie die folgenden Eigenschaften des JHF-Tensors:

- $\text{Tr } \mathbf{A} = E$, wobei Tr die Spur bezeichnet, während E die Gesamtenergie des Oszillators ist.
- $L_i A_{ij} = 0$ mit L_i der i -ten Komponente des Drehimpulses \vec{L} .
- $x_i A_{ij} x_j = \vec{x}^2 E - \vec{L}^2 / 2m$.

Hinweis: Dafür dürfen Sie die Identität $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \times \vec{b})^2$, die für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt, ohne Beweis benutzen.

- $p_i A_{ij} p_j = \vec{p}^2 E - \frac{1}{2} k \vec{L}^2$.

iii. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die 3 Eigenwerte des JHF-Tensors

$$\lambda_1 = \frac{E - \sqrt{E^2 - \omega^2 \vec{L}^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{E + \sqrt{E^2 - \omega^2 \vec{L}^2}}{2}, \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 0$$

sind, wobei $\omega^2 = k/m$. Dabei gelten $\lambda_1 + \lambda_2 = E$ und $\lambda_1 \lambda_2 = \omega^2 \vec{L}^2/4$.

a) Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren zu λ_1 oder λ_2 senkrecht auf \vec{L} sind. (*Hinweis*: Dafür brauchen Sie die Eigenvektoren *nicht* explizit zu bestimmen, sondern ein Resultat aus ii. benutzen!)

Welcher Eigenschaft der Bewegung entspricht dieses Ergebnis?

b) Betrachten Sie ein kartesisches Koordinatensystem, dessen Basisvektoren $\{\vec{e}_i\}$ Eigenvektoren zu den λ_i mit $i = 1, 2, 3$ sind.

Benutzen Sie das Ergebnis aus ii.c), um eine einfache Gleichung — in Abhängigkeit von λ_1 , λ_2 und k — für die Bahnkurve zu bestimmen. Erkennen Sie diese Trajektorie?

3. Ebene elektromagnetische Welle

(40 P.)

Eine linear polarisierte ebene Welle ist definitionsgemäß eine Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum mit elektromagnetischen Potentialen der Form

$$\Phi(t, \vec{r}) = \lambda c f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad \vec{A}(t, \vec{r}) = \vec{\varepsilon} f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (3)$$

mit λ und ω bzw. $\vec{\varepsilon}$ und \vec{k} zeit- und ortsunabhängigen reellen Zahlen bzw. Vektoren und f einer skalaren Funktion.

Zur Erinnerung gelten für beliebige f_1, f_2, \vec{g} die Identitäten

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} [f_1(\vec{r}) f_2(\vec{r})] &= [\vec{\nabla} f_1(\vec{r})] f_2(\vec{r}) + f_1(\vec{r}) \vec{\nabla} f_2(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \cdot [f_1(\vec{r}) \vec{g}(\vec{r})] &= [\vec{\nabla} f_1(\vec{r})] \cdot \vec{g}(\vec{r}) + f_1(\vec{r}) \vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \times [f_1(\vec{r}) \vec{g}(\vec{r})] &= [\vec{\nabla} f_1(\vec{r})] \times \vec{g}(\vec{r}) + f_1(\vec{r}) \vec{\nabla} \times \vec{g}(\vec{r}). \end{aligned}$$

Die Formel für das doppelte Kreuzprodukt ist $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

i. Wie lauten die zugehörigen Felder $\vec{E}(t, \vec{r})$ und $\vec{B}(t, \vec{r})$?

Hinweis: $\vec{\nabla} f(\vec{k} \cdot \vec{r}) = \vec{k} f'(\vec{k} \cdot \vec{r})$ mit f' der Ableitung von f .

ii. Rechnen Sie nach, dass die Transformation

$$\lambda \rightarrow \lambda' \equiv \lambda + \alpha \frac{\omega}{c}, \quad \vec{\varepsilon} \rightarrow \vec{\varepsilon}' \equiv \vec{\varepsilon} + \alpha \vec{k}$$

mit beliebigem $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Eichtransformation ist.

iii. Geben Sie den Ausdruck der „inhomogenen“ Maxwell-Gleichungen¹ im Vakuum für die Welle (3) in Abhängigkeit von der Funktion f bzw. von deren Ableitungen an. Zeigen Sie insbesondere, dass diese Gleichungen zu den folgenden Beziehungen führen

$$\lambda \vec{k}^2 = \frac{\omega}{c} \vec{k} \cdot \vec{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2 \right) \left(\vec{\varepsilon} - \frac{\lambda c}{\omega} \vec{k} \right) = \vec{0}.$$

iv. Zeigen Sie anhand der Ergebnisse aus iii., dass die Lösungen der Form (3) für $\omega^2 \neq c^2 \vec{k}^2$ sogenannte „reine Eichungen“ sind, d.h. sie können durch eine Eichtransformation in $\Phi'(t, \vec{r}) = 0$, $\vec{A}'(t, \vec{r}) = 0$ wegtransformiert werden.

v. Sei nunmehr $\omega^2 = c^2 \vec{k}^2$.

a) Benutzen Sie ein Ergebnis aus iii., um zu zeigen, dass die Potentiale (3) der Lorenz-Eichbedingung automatisch genügen (obwohl die Eichung noch nicht fixiert wurde).

b) Für ein Feld, das keine reine Eichung ist, gilt $\lambda^2 < \vec{\varepsilon}^2$.

Zeigen Sie, dass es möglich ist, durch eine Eichtransformation $\lambda = 0$ anzusetzen. Welcher Eichung entspricht diese Bedingung? Überprüfen Sie, dass man die bekannten Eigenschaften von $\vec{E}(t, \vec{r})$ und $\vec{B}(t, \vec{r})$ für eine transversal polarisierte ebene Welle erhält.

¹... die hier homogen sind, weil es keine Quellterme gibt!

4. Magnetische Monopole

(40 P.)

Sensationelle Entdeckung: isolierte *magnetische Ladungen* (Monopole) wurden gefunden! Sorgfältige Messungen haben die folgenden Ergebnisse ergeben:

- A. Statische magnetische Ladungen erzeugen ein Magnetfeld \vec{B} aber kein elektrisches Feld \vec{E} .
- B. Eine statische magnetische Punktladung $q_{m,1}$ übt auf eine zweite statische magnetische Punktladung $q_{m,2}$ die Kraft
- $$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_{m,1} q_{m,2}}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = q_{m,2} \vec{B}_1(\vec{r}) \quad (4)$$
- aus, mit \vec{r} dem Abstandsvektor von $q_{m,1}$ nach $q_{m,2}$, $r \equiv |\vec{r}|$, und \vec{B}_1 der durch $q_{m,1}$ erzeugten magnetischen Induktion.
- C. Ein stationärer magnetischer Strom erzeugt ein elektrisches Feld \vec{E} .
- D. Magnetische Ladungen können weder erzeugt noch vernichtet werden, sondern sind erhalten.

Sie werden gefragt, die Maxwell-Gleichungen zu „reparieren“, um diese Resultate zu berücksichtigen.

Hinweis: Lassen Sie sich durch die ungewöhnliche Form dieser Aufgabe nicht stören. Sehr wenige Physiker haben neue Gesetze „erfunden“; die meisten haben Ähnlichkeiten mit schon bekannten Phänomenen benutzt und ältere Gesetze für ihre Zwecke „übersetzt“ — z.B. hat Coulomb sein Gesetz für die elektrostatische Kraft in Analogie mit der Gravitationskraft von Newton formuliert. Hier reichen Kenntnisse aus der Vorlesung völlig aus, um die gewünschten Verallgemeinerungen zu finden.

i. Traditionelles...

a) Geben Sie zunächst die „üblichen“ Maxwell-Gleichungen an — für die elektrischen Ladungs- und Stromdichten können Sie die Notationen ρ_e , \vec{j}_e verwenden.

b) Wie lautet die Lorentz-Kraft auf eine elektrische Punktladung q_e mit Geschwindigkeit \vec{v} ?

ii. In den herkömmlichen Maxwell-Gleichungen gibt es deutliche Lücken, die es mit magnetischen Ladungs- und Stromdichten ρ_m , \vec{j}_m zu füllen gilt. Sie können die verallgemeinerten Gesetze natürlich raten, doch Begründungen wären *sehr* willkommen (um die volle Punktzahl zu kriegen...). Einige Elemente, die in Ihrer Antwort erwähnt werden können, um alle experimentellen Ergebnisse **A.–D.** zu beschreiben, sind

- die Ladungsdichte ρ_m einer magnetischen Punktladung;
- das magnetische Gauß'sche Gesetz für das Feld einer solchen Punktladung;
- eine „magnetische Kontinuitätsgleichung“, um die Erhaltung der magnetischen Ladung lokal auszudrücken;
- ein „elektrostatisches Biot–Savart-Gesetz“, oder etwas ähnliches, das das durch eine stationäre magnetische Stromdichte erzeugte elektrische Feld angibt.

Wie lauten die erweiterten Maxwell-Gleichungen?

iii. Kraft auf eine bewegte magnetische Punktladung

Wie sieht die verallgemeinerte Lorentz-Kraft auf eine magnetische Punktladung aus?

Hinweis: Sie sollten auf eine „Symmetrie“ der erweiterten Maxwell-Gleichungen achten. Und auf Dimensionen.

iv. Dualitätstransformation

Man definiert neue Felder über ($\theta \in \mathbb{R}$)

$$\vec{E}' = \vec{E} \cos \theta + c \vec{B} \sin \theta, \quad c \vec{B}' = -\vec{E} \sin \theta + c \vec{B} \cos \theta, \quad (5)$$

$$\rho'_e = \rho_e \cos \theta + \frac{1}{c} \rho_m \sin \theta, \quad \frac{1}{c} \rho'_m = -\rho_e \sin \theta + \frac{1}{c} \rho_m \cos \theta, \quad (6)$$

$$\vec{j}'_e = \vec{j}_e \cos \theta + \frac{1}{c} \vec{j}_m \sin \theta, \quad \frac{1}{c} \vec{j}'_m = -\vec{j}_e \sin \theta + \frac{1}{c} \vec{j}_m \cos \theta, \quad (7)$$

Wie lauten die Bewegungsgleichungen für \vec{E}' und \vec{B}' ?

Es können 140 Punkte erreicht werden.

Noten (voraussichtlich):

- $0 \leq P < 50 \Rightarrow 5.0$
- $50 \leq P < 55 \Rightarrow 4.0$
- $55 \leq P < 60 \Rightarrow 3.7$
- $60 \leq P < 65 \Rightarrow 3.3$
- $65 \leq P < 70 \Rightarrow 3.0$
- $70 \leq P < 75 \Rightarrow 2.7$
- $75 \leq P < 80 \Rightarrow 2.3$
- $80 \leq P < 85 \Rightarrow 2.0$
- $85 \leq P < 90 \Rightarrow 1.7$
- $90 \leq P < 95 \Rightarrow 1.3$
- $P \geq 95 \Rightarrow 1.0$