Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen, Vornamen und Matrikelnummer und nummerieren Sie die Blätter.

Für die „Wissensfragen" sollten Sie nicht zu viel Text schreiben, sondern sich auf die wichtigen Begriffe / physikalischen Ideen / Stichworte fokussieren.

1. Spezielle Relativitätstheorie (35 P.)

i. Relativistische Kinematik

Seien $x^\mu(s)$ mit $\mu = 0, 1, 2, 3$ die Minkowski-Koordinaten der Raumzeit-Trajektorie eines massiven Teilchens bezüglich eines festen Inertialsystems $\mathcal{B}$, wobei s eine Parametrisierung der Trajektorie bezeichnet. Für den metrischen Tensor wird die Konvention $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$ benutzt.

a) Wie ist die Eigenzeit des Teilchens definiert?

b) Wie sind die Komponenten u^μ der Vierergeschwindigkeit des Teilchens bezüglich $\mathcal{B}$ definiert? Wie lautet das Lorentz-Quadrat der Vierergeschwindigkeit?

c) Ein Vierertensor zweiter Stufe sei durch

$$\Delta_{\mu\nu} \equiv \frac{u_\mu u_\nu}{c^2} + \eta_{\mu\nu} \tag{1}$$

definiert. Berechnen Sie ${\Delta^\mu}_\nu u^\nu$ und ${\Delta^\mu}_\nu {\Delta^\nu}_\rho$ (Einsteinsche Summenkonvention!). Was bedeutet das letztere Ergebnis für ${\Delta^\mu}_\nu$, gesehen als „Operator" auf einem Vierervektor-Raum?

ii. Elektromagnetismus in relativistisch kovarianter Schreibweise

a) Wie ist das Viererpotential des elektromagnetischen Feldes definiert? Wie kann der zugehörige Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ dadurch ausgedrückt werden? Erläutern Sie die dabei auftretenden Symbole.

b) Wie lauten die Maxwell-Gleichungen in Abwesenheit von elektrischen Ladungen und Strömen in relativistisch kovarianter Schreibweise?

c) Welcher Bewegungsgleichung genügt das Viererpotential des elektromagnetischen Feldes in Abwesenheit von elektrischen Ladungen und Strömen? Wie kann man die Bewegungsgleichung vereinfachen?

2. Wellenmechanik (30 P.)

i. Vorbereitung

a) Wie lautet die zeitabhängige Schrödinger-Wellengleichung für die Bewegung in drei Raumdimensionen eines Teilchens mit Masse m in Anwesenheit eines Potentials $V(\vec{r})$?

b) Was nennt man „stationäre Schrödinger-Gleichung"? Was bestimmt man mit deren Hilfe?

c) Wie erhält man, ausgehend von einer Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung, eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung?

ii. Bewegung eines Teilchens in einer Raumdimension

In dieser Teilaufgabe wird die Bewegung eines Teilchens mit Masse m im Delta-Potential

$$V(x) = -\alpha\delta(x) \quad \text{mit } \alpha > 0 \tag{2}$$

untersucht.

a) Bestimmen Sie die gebundenen Lösungen $\psi_E(x)$ (mit Energie $E < 0$) der stationären Schrödinger-Gleichung für dieses Potential.

Hinweis: Da das Potential $\delta(x)$ enthält, ist $\psi_E(x)$ zwar stetig bei $x = 0$, $\psi'_E(x)$ jedoch nicht mehr. Die Anschlussbedingung für ψ'_E erhalten Sie dann, indem Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung über $x \in [-\epsilon, \epsilon]$ (mit $\epsilon > 0$) integrieren und anschließend den Limes $\epsilon \to 0$ durchführen.

b) Betrachten Sie die Streuung einer aus $-\infty$ einlaufenden ebenen Welle $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ an dem Potential (2), wobei $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$ mit $E > 0$. Definieren Sie und berechnen Sie die entsprechenden Reflexions- und Transmissionskoeffizienten R und T.

3. Teilchen in einem kugelsymmetrischen Potential (20 P.)

Für die Beschreibung der Bewegung eines Teilchens mit Masse m in einem kugelsymmetrischen Potential $V(\vec{r}) = V(r)$ mit $r \equiv |\vec{r}|$ ist es günstig, Kugelkoordinaten (r, θ, φ) zu benutzen. Mit dem Ansatz $\psi_E(\vec{r}) = R(r)\,Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$ für die Lösungen der stationären Schrödinger-Wellengleichung ergibt sich dann die Radialgleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2mr}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\big[rR(r)\big] + \left[\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2mr^2} + V(r)\right]R(r) = ER(r). \tag{3}$$

i. Wasserstoffatom

Geben Sie die gebundenen Energieniveaus ($E < 0$) im Coulomb-Potential $V(r) = -\dfrac{e^2}{r}$.

Hinweis: Die Rydberg-Konstante lautet $R \equiv \dfrac{e^2}{2a}$ mit dem Bohrschen Radius $a \equiv \dfrac{\hbar^2}{me^2}$.

ii. Bestimmen Sie die gebundenen Energieniveaus im Potential $V(r) = \dfrac{A}{r^2} - \dfrac{B}{r}$ mit $A, B > 0$.

4. Addition und Kopplung von Drehimpulsen (25 P.)

i. Vorbereitung

a) Welche Vertauschungsrelationen erfüllen die Komponenten $\hat{J}_i$ eines Drehimpulsoperators $\hat{\vec{J}}$?

b) Seien $\hat{\vec{J}}^{(1)}$ und $\hat{\vec{J}}^{(2)}$ die Spin-Operatoren von Teilchen mit den jeweiligen Spins j_1 und j_2 und sei $\hat{\vec{J}} \equiv \hat{\vec{J}}^{(1)} + \hat{\vec{J}}^{(2)}$ der Gesamtspin-Operator des aus den zwei Teilchen bestehenden Systems.
Was sind die Eigenwerte von $\hat{\vec{J}}^2$? Mit welchem Entartungsgrad kommen sie vor?

ii. Der Hamilton-Operator eines Systems aus zwei Spin-2-Teilchen mit Spinoperatoren $\hat{\vec{J}}^{(1)}$ und $\hat{\vec{J}}^{(2)}$ sei

$$\hat{H} = A\,\hat{\mathbb{1}} + B\,\hat{\vec{J}}^{(1)}\cdot\hat{\vec{J}}^{(2)} + C\big(\hat{J}_z^{(1)} + \hat{J}_z^{(2)}\big), \tag{4}$$

mit reellen Konstanten A, B, C.

a) Bestimmen Sie einen Satz von Operatoren, die mit $\hat{H}$ kommutieren.

b) Finden Sie die Energieeigenwerte des Systems. Gibt es Entartung?

5. Störungsrechnung (30 P.)

Beschreibt man das Proton als homogen geladene Kugel vom Radius R_0, so kann der Einfluss der Kernausdehnung auf die Energieniveaus des Wasserstoffatoms durch den Störungsterm

$$W(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{e^2}{R_0}\left(\dfrac{R_0}{r} + \dfrac{r^2}{2R_0^2} - \dfrac{3}{2}\right) & \text{für } 0 \le r \le R_0 \\ 0 & \text{für } r > R_0 \end{cases} \tag{5}$$

mit $r \equiv |\vec{r}|$ modelliert werden, der als Störung des Coulomb-Potentials

$$V(\vec{r}) = -\frac{e^2}{r} \tag{6}$$

zu betrachten ist.

i. Sei $\psi_n(\vec{r})$ eine Eigenfunktion der stationären Schrödinger-Gleichung für das Potential (6) mit Energie $E_n < 0$. Wie lautet die durch die Störung (5) verursachte Verschiebung des Energieniveaus in erster Ordnung Störungsrechnung? Drücken Sie die Energiekorrektur in der Form eines Integrals aus.

ii. Für den Grundzustand der Bewegung im Potential (6) sind die Eigenenergie und -funktion

$$E_1 = -\frac{e^2}{2a} \quad \text{und} \quad \psi_1(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \mathrm{e}^{-r/a} \tag{7}$$

mit a dem Bohrschen Radius des Atoms. Hiernach soll die Energiekorrektur zu diesem Grundzustand (annähernd) berechnet werden.

a) Setzen Sie zuerst $\psi_1(\vec{r})$ in das in **i.** gefundene Integral ein und führen Sie die Winkelintegration durch. Das Ergebnis können Sie als Integral über $\rho \equiv r/a$ mithilfe von E_1 und $\rho_0 \equiv R_0/a$ ausdrücken.

b) Das Integral aus **ii.a)** ist zwar analytisch berechenbar; um ein einfacheres Integral zu erhalten, dürfen Sie jedoch die Näherung $\mathrm{e}^{-2\rho} \approx 1$ im Integranden machen. Berechnen Sie die resultierende Energiekorrektur erster Ordnung.

Es können 140 Punkte erreicht werden.

Noten (voraussichtlich):

- $0 \leq P < 50 \Rightarrow 5.0$
- $50 \leq P < 55 \Rightarrow 4.0$
- $55 \leq P < 60 \Rightarrow 3.7$
- $60 \leq P < 65 \Rightarrow 3.3$
- $65 \leq P < 70 \Rightarrow 3.0$
- $70 \leq P < 75 \Rightarrow 2.7$
- $75 \leq P < 80 \Rightarrow 2.3$
- $80 \leq P < 85 \Rightarrow 2.0$
- $85 \leq P < 90 \Rightarrow 1.7$
- $90 \leq P < 95 \Rightarrow 1.3$
- $P \geq 95 \Rightarrow 1.0$